

Ludosław Cichowicz, Janusz Zieliński

KATEDRA ASTRONOMII GEODEZYJNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zagadnienie pozycyjnych obserwacji sztucznych satelitów Ziemi oraz wyznaczania współrzędnych geograficznych punktów podsatelitowych

W pierwszej części artykułu omawia się znaczenie pozycyjnych obserwacji sztucznych satelitów Ziemi w ogólności oraz dokonuje się przeglądu naukowych i praktycznych zastosowań tych obserwacji w szczególności w dziedzinie geodezji, kartografii i astronomii praktycznej; zamieszcza się rozważania z teorii orbity sztucznego satelity Ziemi w zakresie twierdzeń i wzorów, niezbędnych dla realizacji tematu roboczego rozwiniętego w części drugiej.

Drugą część artykułu stanowi numeryczny przykład obliczenia pozycji geograficznych i wysokości nad powierzchnią Ziemi sztucznego satelity 1958 δ 2 (Sputnik III) dla danych momentów, po uprzednim wyznaczeniu brakujących elementów jego orbity oraz ich zmian w czasie, na podstawie wizualnych obserwacji wykonanych w drugiej połowie maja i pierwszej połowie czerwca 1958 r.

Część I

1. Wstęp

Od jesieni 1957 roku do chwili obecnej¹ uczeni Związku Radzieckiego i Stanów Zjednoczonych umieścili na orbitach okołoziemskich dwadzieścia jeden sztucznych satelitów Ziemi oraz trzy sztuczne planety; w liczbie tej trzy Sputniki, 5 Explorerów, 3 Vanguardy, 7 Discovererów, 1 Atlas, 1 Transit, 3 Łunniki oraz 2 Pioniery. Biorąc pod uwagę wielocłonowość większości wymienionych obiektów (np. w przypadku Sputnika III mamy: 1958 δ 1 — raketę nośną, 1958 δ 2 — głowicę z zasobnikami, 1958 δ 3 — osłonę dziobową, 1958 δ 4 i 5 — osłony boczne), penetracji przestrzeni kosmicznej dokonywało kilkadziesiąt, rękami mieszkańców Ziemi utworzonych, ciał niebieskich. Nachylenia orbitalnych pła-

¹ Koniec kwietnia 1960 r.

szczyzn tych obiektów do płaszczyzny równika ziemskiego wynoszą od około 33° — w przypadku Vanguardów i niektórych Explorerów, około 50° — w przypadku do pozostałych Explorerów, około 65° — w odniesieniu do radzieckich Sputników, do 90° — w przypadku amerykańskich Discovererów. Jeżeli zważyć, iż znaczna część umieszczonych na orbicie sztucznych satelitów Ziemi krąży dotąd i w przyszłości przez kilka, kilkadziesiąt, czy kilkaset lat, lub — teoretycznie — wieczność obiegać będzie naszą planetę, jeżeli uprzytomnić sobie także, iż liczba automatycznych pojazdów kosmicznych wzrasta z czasem, wzmacnia się świadomość, że w oczach naszych realizuje się etap pierwszy pokojowego podboju przestrzeni kosmicznej. Etap następny — osobista penetracja przestrzeni międzyplanetarnej przez istotę ludzką oraz osiągnięcie przezeń powierzchni Księżyca lub planety — jest również kwestią lat niedalekich i niewątpliwie stanie się zdobyczą tego samego pokolenia.

Czy jednak wystrzelenie sztucznych satelitów Ziemi i Słońca, to miłowy krok naprzód tylko na polu techniki raketowej i astronautyki? Liczne rozprawy teoretyczne, opracowania obserwacji i komunikaty, sygnalizowane przez ośrodki naukowe, o coraz bardziej rozszerzającym się wachlarzu dyscyplin, przeczą temu ewentualnemu przypuszczeniu.

Z natury rzeczy zastosowanie sztucznych satelitów Ziemi do badań naukowych uwarunkowało wszechstronny postęp grupie nauk o Ziemi i o jej najbliższym otoczeniu [1]: więc geofizyce ze szczególnym uprzywilejowaniem fizyki górnych warstw atmosfery (ciśnienie, gęstość, temperatura, skład chemiczny itd.), nauki o polach elektrostatycznym i elektromagnetycznym Ziemi oraz meteorologii. Obserwacje przeprowadzane za pomocą sztucznych satelitów dostarczyły także człowiekowi nowych aspektów badawczych w poznawaniu zagadnień przestrzeni kosmicznej, takich jak meteorytyka, badanie składowej gazowej materii międzygwiazdowej, badanie promieniowania kosmicznego, promieniowania słonecznego i krótkofalowej części widma słonecznego ...

Nowe drogi otwierają się przed astronomią dzięki możliwości dokonywania różnych obserwacji bez przeszkody, jaką stanowi atmosfera ziemską, że wymienić choćby fotografie ciał układu słonecznego i metalaktyki.

Biologia i medycyna zajmuje się współcześnie zagadnieniem wpływu lotu raketowego na istotę żywą (przyśpieszenie, szum i wibracja, nieważkość), a jednocześnie tworzy się aparaturę zabezpieczającą warunki egzystencji załogi, tj. regenerację powietrza, regulację temperatury, dostarczenie wody, fiksację itp.

W stadium próbnego eksperymentowania znajdują się problemy światowej telekomunikacji i telewizji przez zastosowanie trzech stacjonarnych sztucznych satelitów umieszczonych na orbicie okołorów-

nikowej w odległości około 36 tys. km od Ziemi. Znane są także projekty międzyplanetarnych baz o znaczeniu wojskowym itd.

Wreszcie niżej mówić będziemy o zastosowaniach sztucznych satelitów w zakresie geodezji wyższej, kartografii, astronomii geodezyjnej i nawigacyjnej.

Przeważająca większość badawczego i odkrywczego materiału w wyszczególnionych dziedzinach nauki, osiągnięta za pośrednictwem sztucznych mikroksiężyców i mikroplanet, otrzymywana jest dzięki zainstalowaniu w zasobnikach rozmaitej aparatury automatycznej, która przekazuje wiadomości na Ziemię drogą radiową.

Osobne, doniosłe znaczenie tak dla nauki, jak i dla niektórych celów praktycznych, stanowią obserwacje sztucznych satelitów Ziemi typu pozycyjnego, są to obserwacje: wizualne, fotograficzne i radiolokacyjne. Z natury rzeczy ten rodzaj obserwacji i osiągnięte przy jego pomocy materiały znajdują się głównie w sferze zainteresowań geodezji i astronomii pozycyjnej.

Jeżeli pominąć wyszczególnienie, może zbyt śmiało pomyślanych, lecz bynajmniej nie przedwczesnych do rozpracowania, zastosowań miernictwa geodezyjnego i astronomii, jakie czekają nas w niedalekiej przyszłości (zagadnienie wyznaczania pozycji i czasu, wyznaczanie figury, pomiary powierzchniowe i długości, ... na Księżycu lub pobliskiej planecie) — współczesna wiedza i praktyka geodezyjno-astronomiczna wzbogaciła się dzięki lotom sputnikowym o nowe aspekty odkrywcze i praktyczne. Oto kilka najważniejszych.

Sztuczny satelita Ziemi odbywał swój lot obiegowy w polu grawitacyjnym naszej planety; orbita jego, zgodnie z prawami mechaniki niebieskiej, winna zachować niezmienną orientację w przestrzeni oraz stały kształt i rozmiary. Deformacja orbity oraz zmiany w czasie elementów jej orientacji powodowane są (w przypadku niezbyt odległych sputników) w pierwszym rzędzie przez dwa czynniki perturbacyjne: opór atmosfery i spłaszczenie elipsoidy ziemskiej. Tak więc przy dostatecznej znajomości pierwszego z tych czynników i w oparciu o otrzymane z obserwacji pozycyjnych ilościowy efekt wpływu wypukłości równikowej Ziemi na zmianę elementów orbity — otrzymać możemy wartość spłaszczenia Ziemi (Wartość spłaszczenia Ziemi otrzymana tą drogą przez naukowców radzieckich wynosi $1/297,5 \pm 0,5$, obliczona zaś przez naukowców USA $1/298,2$).

Analogiczną drogą, w oparciu o wynikające z obserwacji małe deformacje i zmiany orbity na skutek prawdopodobnego istnienia trzech osi symetrii Ziemi (dwie w płaszczyźnie równikowej) lub gruszkowego względnie baryłkowatego jej kształtu, możemy otrzymać dane odnoszące się do figury geoidy i rozmieszczenia mas w jej wnętrzu.

Sztuczne satelity Ziemi dają także możliwość skonstruowania nowej metody nawiązania elipsoid odniesienia przez wyznaczenie położenia ich geometrycznych środków względem środka bezwładności Ziemi.

Nowa droga otwiera się przed praktycznym rozwiązaniem zagadnienia nawiązań międzykontynentalnych. Przez wystrzelenie pierwszego satelity nawigacyjnego (Transit 1) w stadium praktycznej realizacji wchodzi domena żeglugi morskiej i powietrznej i związana z nią metodyka astronawigacji i wyznaczania przybliżonych pozycji geograficznych.

Nowe perspektywy stoją przed zagadnieniem wyznaczania czasu za pomocą obserwacji przejść sztucznego ciała niebieskiego, wolnego od wpływu oporu atmosfery ziemskiej.

Na koniec, w dziedzinie kartografii rejonów izolowanych i mało znanych znalazła znakomite zastosowanie technika namiarów radiolokacyjnych; tą drogą poprawiono na mapach położenie geograficzne szeregu wysp na Pacyfiku.

Obserwacje pozycyjne mają osobne znaczenie dla eksperymentalnego sprawdzenia niektórych efektów teorii względności, i tak jeden rok obserwacji lotu sztucznego satelity Ziemi stanowi równowartość obserwacji Merkurego w przeciągu lat czterdziestu; około tyle razy bowiem relatywistyczny efekt przesuwania się perigeum sztucznego satelity Ziemi jest większy aniżeli ruch perihelium Merkurego.

Jak widzimy z tego pobieżnego przeglądu, znaczenie pozycyjnych obserwacji sztucznych satelitów Ziemi jest dla szerokiego wachlarza zagadnień geodezyjno-astronomicznych niewątpliwe.

We wstępie niniejszego artykułu ograniczyliśmy się jedynie do wskazania kilku najważniejszych problemów, nie zagłębiając się ani w teorię poszczególnego zagadnienia, ani też nie przedstawiając aktualnego stanu wiadomości zdobytych w toku najnowszych badań. Jest bowiem celem tego opracowania, po podkreśleniu znaczenia obserwacji pozycyjnych dla potrzeb geodezyjno-astronomicznych, poruszyć zagadnienie związku pomiędzy mierzonymi w toku obserwacji elementami a parametrami orbity satelitarnej i niektórymi efektami perturbacyjnymi, a następnie przytoczyć w części II numeryczny przykład roboczy, którego założenia są analogiczne lub podobne przy opracowaniu materiałów obserwacyjnych dla rozmaitych celów.

2. Obserwacje sztucznych satelitów

Mając na uwadze duże znaczenie w ogóle, a w niektórych zagadnieniach nieodzowność wykonywania optycznych obserwacji sztucznych satelitów Ziemi, w krajach macierzystych, tj. w Związku Radzieckim oraz w Stanach Zjednoczonych, już na kilka lat przed wystrzeleniem pierwszego Sputnika i pierwszego Explorera przygotowano sieć stacji, mających

za zadanie prowadzenie stałej służby obserwacyjnej. Liczba stacji wizualnych obserwacji sztucznych satelitów Ziemi wynosi w chwili obecnej około 500, w tym około 100 w ZSRR, 150 w USA, 80 w Japonii itd., w licznych krajach wszystkich kontynentów od kilku do dwudziestu. Stacje te zawiadamiane telegraficznie przez ośrodki dyspozycyjne (w ZSRR — KOSMOS, w USA w łonie organizacji Moonwatch, Smithsonian Institut), w wyniku obserwacji dostarczają dla każdego przelotu topocentryczne współrzędne równikowe lub horyzontalne i odpowiadające im momenty czasu. Dokładność tego typu obserwacji, wykonywanych za pomocą małych lunetek (małe powiększenie, duże pole widzenia), teodolitów lub lornetek, jest rzędu $0,1^{\circ}$ — 1° (współrzędne) oraz $0,1^s$ — 1^s (czas). Masowe obserwacje wizualne dostarczają uzupełniającego materiału dla wyznaczenia przybliżonych elementów orbity sztucznego satelity Ziemi oraz dla obliczenia efemeryd dla poszczególnych stacji.

Metodyka spostrzeżeń jest różna. Przy rozporządzaniu większą liczbą ośrodków obserwacyjnych i liczną załogą, stosuje się metodę bariery optycznej lub przejść południkowych i w pierwszym wertykale; przy szczupłej załodze metodę patrolowania nieba. Rejestracja czasu odbywa się sposobem wzrokowo-słuchowym, lub przy użyciu chronografu. Obserwacje wizualne są niezastąpione w przypadku obiektów o małej jasności, szczególnie ważne w początkowym i końcowym okresie żywota sztucznego satelity, kiedy orbita jego nie jest dostatecznie znana lub szybko zmieniają się jej elementy.

Znacznie dokładniejsze rezultaty otrzymuje się za pomocą obserwacji przy użyciu fotograficznych kamer: odpowiednio $0,01^{\circ}$ — $0,1^{\circ}$ i $0,01^s$ — $0,1^s$. Obserwacje te są nadto bardziej ekonomiczne, bowiem z jednej kliszy odczytać można do kilkunastu pozycji sztucznego satelity. Mankamentem metody fotograficznej jest ograniczoność jej stosowania w przypadku obiektów charakteryzujących się małą jasnością.

Ponadto w pasie blisko równikowym rozmieszczone są w liczbie 12 specjalne stacje wyposażone w wielkie kamery fotograficzne Baker-Nunn o precyzyjnej konstrukcji, które pozwalają na osiągnięcie dokładności sięgających: $0,001^{\circ}$ i $0,001^s$.

W Polsce regularna służba obserwacji sztucznych satelitów Ziemi, zapoczątkowana na wiosnę 1958 r. w związku z operacją Międzynarodowego Roku Geofizycznego, obejmowała dziesięć stacji obserwacji wizualnych, z których dwie wykonywały także obserwacje fotograficzne i jedna obserwacja nasłuchu radiowego [13]. W początku roku 1960 zgłosiły gotowość do prowadzenia stałej służby obserwacyjnej stacje uniwersyteckie lub politechniczne: w Warszawie, Krakowie, Poznaniu i Wrocławiu, stacja PTMA w Gdańsku, Planetarium w Chorzowie oraz stacja w Zegrzu. Co najmniej trzy spośród wymienionych prowadzić będą

obserwacje fotograficzne, jedna zaś będzie kontynuować obserwacje radiowe.

Polska służba sztucznych satelitów Ziemi, koordynowana przez Komitet Międzynarodowej Współpracy Geofizycznej przy Prezydium PAN, współpracuje z ośrodkiem dyspozycyjnym w Związku Radzieckim (KOSMOS). Ścisłe współpracuje z krajową służbą sputnikową Państwowego Instytutu Hydrologiczno-Meteorologicznego, który udostępnił swój aparat łączności dla komunikacji pomiędzy biurem Kosmos, Komitetem MWG i poszczególnymi stacjami.

Wyniki polskich obserwacji sztucznych satelitów Ziemi ogłaszane są w zbiorczych zestawieniach biuletynów radzieckich [3], zaś od początku 1960 roku w „Biuletynie polskich obserwacji sztucznych satelitów Ziemi” [4] obok innych informacji związanych ze służbą sputnikową.

3. Praktyczne zagadnienia rachunkowe

Zarówno w zadaniach wymagających ścisłego rozwiązania numerycznego, jak również w odniesieniu do zagadnień przybliżonych, zależnie od okoliczności spotyka się dwa następujące podstawowe problemy rachunkowe:

1. Na podstawie materiałów obserwacyjnych (współrzędne topocentryczne równikowe lub horyzontalne sztucznego satelity oraz momenty jego przejść; współrzędne geograficzne stacji) obliczyć elementy orbity sztucznego satelity i ich zmiany w czasie.

2. Dla określonych momentów czasu przy znajomości elementów orbity SSZ obliczyć położenia geograficzne punktów podsatelitowych oraz wysokości satelity nad powierzchnią Ziemi.

W drugiej części niniejszego opracowania zamieszczamy przykład rozwiązania pewnego praktycznego zadania, w którym zaszła konieczność sprostania obu okolicznościom. Najogólniej temat zadania sprowadzał się do wyznaczenia dla zadanych momentów czasu pewnej określonej epoki, współrzędnych geograficznych φ_s i λ_s oraz wysokości H_s sztucznego satelity 1958 02 nad powierzchnią Ziemi. Trudność w rozwiązaniu zagadnienia polegała na braku elementów orbity wiążących położenie satelity z czasem oraz na przybliżonej tylko znajomości pozostałych elementów.

Temat powyższy stanowił astronomiczno-geodezyjne uzupełnienie naukowego opracowania radiowych obserwacji stacji Zegrze, mających m. in. na celu eksperymentalne sprawdzenie teorii S. Manczarskiego o rozchodzeniu się fal radiowych w jonosferze [5]. Zarówno jonosferyczna, jak i astronomiczno-geodezyjna część tematu zostały zgłoszone w postaci referatów na III Konferencję Przedstawicieli Państw Rejonu Europejsko-Azjatyckiego M.R.G. w lutym 1959 r. [9].

W opracowaniu niniejszym podaje się jedynie zasadniczy wątek obliczeń wraz z odpowiednimi wzorami roboczymi i ich dyskusją.

Obecnie przytoczymy niektóre twierdzenia i wzory oraz rozważania teoretyczne, dotyczące ruchu orbitalnego sztucznego satelity Ziemi, na bazie których można było przeprowadzić dyskusję zadania i dokonać wyboru drogi jego rozwiązania.

4. Eliptyczna orbita sztucznego satelity Ziemi

Ruch sztucznego satelity posiadającego masę m_1 dookoła Ziemi o masie m_2 odbywa się w polu oddziaływania sił grawitacyjnych:

$$K = -\frac{fm_1m_2}{r^2}, \quad (1)$$

gdzie f jest stałą ciężenia powszechnego, zaś r promieniem wodzącym bieżącej pozycji SSZ (jego odległością od środka Ziemi). Ruch satelity odbywa się zgodnie z brzmieniem równań ruchu:

$$\frac{d^2r}{dT^2} - r\left(\frac{dv}{dT}\right)^2 = -\frac{fm_2}{r^2} \quad (2a)$$

oraz

$$\frac{d(r^2v)}{dT} = 0. \quad (2b)$$

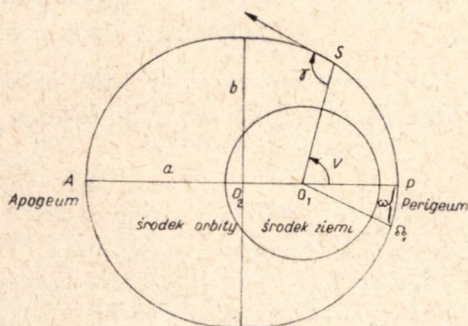
Kąt v , który obok wielkości r charakteryzuje położenie satelity w płaszczyźnie orbity jest kątem płaskim, który możemy utożsamiać z tzw. anomalią prawdziwą, o ile mierzony jest od perigeum P (rys. 1) zgodnie z kierunkiem ruchu SSZ.

Scałkowanie równania 2b prowadzi do drugiego prawa Keplera, które wyrażamy wzorem:

$$r^2 \frac{dv}{dT} = 2 \frac{d\Phi}{dT} = C, \quad (3)$$

gdzie C jest tzw. stałą prawa powierzchni, zaś $\frac{d\Phi}{dT} = \frac{r^2}{2} \frac{dv}{dT}$ stanowi pole powierzchni opisywanej przez promień r na jednostkę czasu. Jest to tzw. prędkość sektorowa, podczas gdy prędkość satelity w orbicie jest

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dT}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dT}\right)^2. \quad (4)$$



Rys. 1

Pomiędzy wektorem prędkości V i wektorem r zachodzi związek:

$$\frac{dr}{dT} = V \cos \gamma, \quad (5)$$

gdzie γ (rys. 1) jest kątem zawartym pomiędzy kierunkiem ruchu SSZ i kierunkiem, pod którym jest on widziany z Ziemi. Związek (5) wyraża radialną prędkość, podczas gdy wyrażenie na prędkość kątową ma postać

$$r \frac{dv}{dT} = V \sin \gamma. \quad (6)$$

Na podstawie zależności (3) i (4) możemy napisać:

$$C = Vr \sin \gamma = V_p r_p, \quad (7)$$

gdzie znaczek p odnosi się do punktu największego zbliżenia satelity do powierzchni Ziemi, zwanego perigeum (rys. 1). Mamy także

$$\frac{m_1}{2} V^2 - \frac{f m_1 m_2}{r} = \text{energia całkowita.} \quad (8)$$

energia energia
kinetyczna potencjalna

Na mocy związków (4) i (8), po wyrugowaniu czasu T , za pomocą równania (3), i scałkowaniu dostajemy równanie:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (9)$$

wyrażające pierwsze prawo Keplera.

Jeżeli $\Phi = \pi \cdot a \cdot b$ przedstawia całkowitą powierzchnię określoną orbitą, zaś P okresem obrotu SSZ, to w oparciu o wzór (3) dostaniemy związek

$$C = 2 \frac{\pi a b}{P} = \frac{2\pi}{P} a^2 (1-e^2)^{1/2}. \quad (10)$$

A ponieważ jednocześnie

$$C^2 = f m_2 a (1-e^2), \quad (11)$$

przeto zestawiając równanie (10) i (11) ze sobą otrzymamy zależność:

$$\frac{a^3}{p^2} = \frac{f m_2}{4\pi^2} = \text{const.}, \quad (12)$$

która nosi nazwę trzeciego prawa Keplera.

Wzory (3), (9), (12) charakteryzujące prawa ruchu sztucznego satelity Ziemi po jego eliptycznej orbicie uzupełnimy słowami: *sztuczny satelita ziemski porusza się w tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez środek Ziemi, zaś położenie tej płaszczyzny w odniesieniu do gwiazd nie zmie-*

nia się; orbita SSZ jest elipsą, której jedno z ognisk znajduje się w środku Ziemi; okres obrotu SSZ związany jest z jego odległością od środka Ziemi. Zakładamy przy tym, że Ziemia jest jednorodną kulą.

Położenie sztucznego satelity na orbicie w zadanym momencie określa się wzorami, które wynikają z następującego rozumowania. Z równań (3) i (9) (pierwsze i drugie prawo Keplera) otrzymujemy:

$$T - T_p = \frac{1}{C} \int_0^v r^2 dv = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{C} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} \quad (13)$$

Przyjmując znaną z mechaniki nieba zależność:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

gdzie E oznacza anomalię mimośrodową, po podstawieniu i scałkowaniu będziemy mieli na mocy (13) i (11):

$$T - T_p = \frac{ab}{C} (E - e \sin E) = \frac{P}{2\pi} (E - e \sin E), \quad (14)$$

skąd otrzymujemy tzw. równanie Keplera:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P} (T - T_p) = M \quad (\text{tzw. anomalia średnia}). \quad (15)$$

W przypadku, gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia położenia sztucznego satelity Ziemi w jego orbicie w określonym momencie T , stosowanie równania Keplera (15) napotyka na trudności, gdyż jest ono równaniem przestępnym ze względu na anomalię mimośrodową E . Korzystamy wówczas z postaci tego wzoru rozłożonego w szereg przy pomocy funkcji Bessela, a mianowicie

$$E = M + e \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3}{8} e^3 \sin 3M + \dots \quad (16)$$

W podobny sposób rozłożone zostały w szereg wyrażenia na anomalię prawdziwą v oraz anomalię średnią M :

$$v = M + 2e \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M + \dots \quad (17)$$

$$M = v + 2e \left(1 - \frac{5e^2}{4}\right) \sin v + \frac{13}{4} e^2 \sin 2v + \frac{47}{6} e^3 \sin 3v + \dots \quad (18)$$

Z kolei stosunek wielkości promienia wodzącego (odległości SSZ od środka Ziemi) do półosi wielkiej:

$$\frac{r}{a} = \frac{1-e^2}{1+e \cos v} = 1 - e \cos E$$

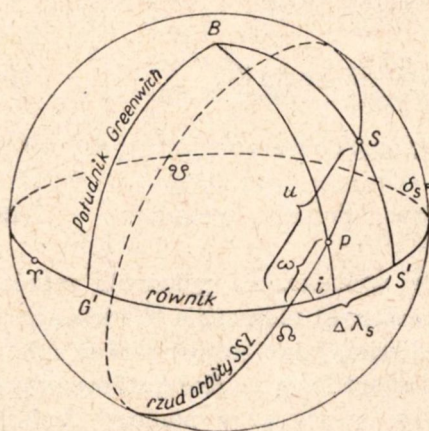
przedstawić możemy w postaci szeregu:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e \left(1 - \frac{3e^2}{8} \right) \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M - \frac{3}{8} e^3 \cos 3M - \dots \quad (19)$$

zaś jego odwrotność:

$$\frac{a}{r} = 1 + e \left(1 - \frac{e^2}{8} \right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M + \dots \quad (20)$$

Przejdźmy następnie do rozważań związanych z położeniem sztucznego satelity Ziemi w przestrzeni. Niech na rysunku 2 punkt S oznacza chwilowe położenie sztucznego satelity Ziemi, B — biegun Ziemi, znak $\oslash$ miejsce przecięcia orbity SSZ płaszczyzną równika, P — perigeum, znak



Rys. 2

γ — punkt równonocy wiosennej (wszystkie punkty po zrzutowaniu orbity na powierzchnię Ziemi). Oznaczając odpowiednio kąty i boki trójkąta $SS'\oslash$ przez u , δ_s i $\Delta\lambda$ oraz i , z łatwością potrafimy napisać wzory wynikające z powiązania ze sobą elementów tego (prostokątnego) trójkąta:

$$\sin \delta_s = \sin i \sin u \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda' = \cos i \operatorname{tg} u \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} \delta_s \operatorname{cosec} \Delta\lambda' = \operatorname{tg} u \quad (23)$$

$$\cos \delta_s \cos \Delta\lambda' = \cos u \quad (24)$$

Nietrudno przy tym zauważyć, że $\Delta\lambda' = \lambda_s - \lambda_{\oslash} = a_s - a_{\oslash}$; nadto pomiędzy deklinacją geocentryczną sztucznego satelity δ_s a szerokością geograficzną jego rzutu na powierzchnię Ziemi zachodzi równość $\delta_s = \varphi_s$.

Z rysunku 2 możemy także odczytać, iż rektascenzja SSZ a_s równa się miejscowemu czasowi gwiazdowemu w punkcie podsatelitowym. Jeżeli zrzutujemy orbitę sputnika na powierzchnię Ziemi, musimy mieć na uwadze, że Ziemia w czasie $T_{\oslash} - T_s$ obróci się dokoła swojej osi z za-

chodu na wschód o kąt $\delta\lambda = \frac{2\pi}{1^d} (T_{\oslash} - T_s)$, podczas którego sztuczny satelita przebył drogę równą łukowi u . Kąt $\delta\lambda$ należy uwzględnić przy rozwiązaniu zagadnień związanych z wyznaczaniem długości geograficznej sztucznego satelity.

Oznaczmy

$$\lambda_s - \lambda_{\Omega} + \frac{2\pi}{1^d} (T_{\Omega} - T_s) = \Delta\lambda_s + \delta\lambda = \Delta\lambda'' \quad (25)$$

otrzymamy związki:

$$\sin \varphi_s = \sin i \sin u, \quad (26)$$

$$\Delta\lambda'' = \arctg (\cos i \operatorname{tg} u + \delta\lambda), \quad (27)$$

$$\Delta\lambda'' = \arcsin (\cotg i \operatorname{tg} \varphi_s + \delta\lambda), \quad (28)$$

$$\Delta\lambda'' = \arccos (\cos u \sec \varphi_s + \delta\lambda). \quad (29)$$

Wielkość $T_{\Omega} - T_s$ można obliczyć przy pomocy równania Keplera (15).

Z kolei możemy napisać równanie, wskazujące związek między bieżącą odległością kątową SSZ od równika ziemskiego, mierzoną w płaszczyźnie orbity, a czasem:

$$u = \frac{2\pi}{1^d} (T_{\Omega} - T_s) = \frac{2\pi}{1436^m} (T_{\Omega} - T_s)^m = \frac{2\pi N}{P} (T_{\Omega} - T_s), \quad (30)$$

gdzie 1436 jest liczbą minut gwiazdowej doby, zaś N liczbą obrotów satelity w ciągu doby.

Zestawimy obecnie podstawowe parametry eliptycznej orbity sztucznego satelity Ziemi, które jednocześnie określają jej kształt i rozmiary oraz orientację przestrzenną. Są to:

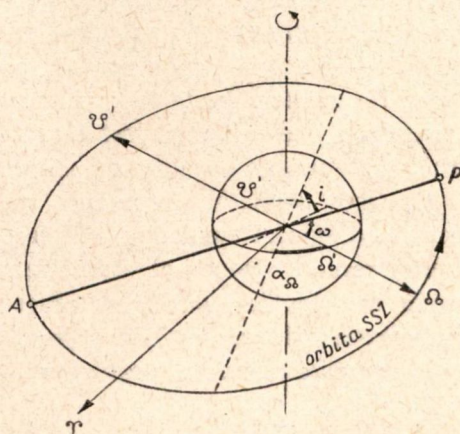
duża półoś a , lub mała półoś b ,

$$\text{mimośród } e = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a},$$

nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny równika Ziemi i ,

rektanscenzja węzła wstępującego $\gamma_{\Omega} = a_{\Omega}$ (argument perigeum ω , czas przejścia SSZ przez węzeł wstępujący T_{Ω} lub czas jego przejścia przez perigeum T_p), okres $P = \frac{2\pi a^{3/2}}{f m_2^{1/2}}$ (drakoniczny P_{Ω} , anomalistyczny P_p).

I tak nachylenie i oraz rektanscenzja węzła a_{Ω} określają orientację płaszczyzny orbity w przestrzeni (rys. 3), argument szerokości perigeum ω wskazuje orientację elipsy orbitalnej w płaszczyźnie orbity, zaś mimośród e i duża półoś a charakteryzują rozmiary i kształt orbity. Czas przejścia SSZ przez węzeł wstępujący lub przez perigeum T_{Ω} lub T_p oraz okres P wiążą ruch satelity z czasem.



Rys. 3

5. Perturbacje orbity

Tak opisana i przedstawiona wzorami (1—30) orbita sztucznego satelity Ziemi odnosiłaby się do teoretycznego przypadku obracania się satelity dookoła Ziemi stanowiącej jednorodną, izolowaną kulę. Tymczasem lot sztucznych satelitów odbywa się w sferze działania grawitacyjnego Ziemi, która w rzeczywistości przedstawia sobą spłaszczoną sferoidę o niejednorodnej strukturze wewnętrznej; poza tym, jak wiadomo, układ Ziemia — sputnik znajduje się w sferze pewnego oddziaływania innych ciał układu słonecznego, jak Księżyc, Słońce i planety. W rezultacie zarówno orientacja przestrzenna orbity sputnika, jak i jej kształt i rozmiary podlegają wiekowym, jak i okresowym zmianom, czyli perturbacjom. Największe perturbacje orbity sputnikowej spowodowane są następującymi przyczynami:

a. Spłaszczenie Ziemi powoduje znaczne zmiany wiekowe w wartości rektascenzji węzła wstępującego (ruch linii węzłów), $\Delta\alpha_\Omega$, oraz znaczne zmiany w wartości argumentu perigeum (ruch linii apsyd) $\Delta\omega$; wpływa zatem na zmianę orientacji orbity w przestrzeni (w przypadku np. sputnika 1958 δ zmiana $\Delta\alpha$ na jedną dobę wynosiła około 3° , zaś zmiana $\Delta\omega$ na jedną dobę około $0,4^\circ$); powoduje także bardzo nieznaczne zmiany okresowe. Na zmianę kształtu i rozmiarów orbity wpływa w sposób bardzo nieznaczny. Perturbacja jest funkcją spłaszczenia Ziemi oraz nachylenia orbity sztucznego satelity do płaszczyzny równika ziemskiego.

b. Opór powietrza powoduje znaczne zmiany prędkości SSZ, zmniejszenia odległości sputnika od środka Ziemi (wysokości w perigeum), zmniejszenie P (więc i a), zmniejszenie mimośrod e . Nie wywołuje zatem zmian w orientacji orbity w przestrzeni, lecz wiekowe zmiany kształtu i wielkości orbity. Jest funkcją odległości sputnika od powierzchni Ziemi.

c. Pozostałe źródła perturbacji orbity sztucznego satelity są następujące:

- grawitacyjny wpływ Księżyca, Słońca i planet,
- asymetria Ziemi i niejednorodność jej struktury,
- tarcie przyprływowe,
- ruch wirowy satelity,
- wzajemne oddziaływanie pól elektromagnetycznych i elektrostatycznych,
- rotacja atmosfery,
- efekty teorii względności wyrażające się w ruchu perigeum.

Wymienione w punkcie c efekty są znacznie mniejsze, aniżeli skutki oddziaływania spłaszczenia Ziemi i oporu atmosfery i są bardzo trudne do ilościowego wyznaczenia, zarówno ze względu na ich znikomość, jak i złożoność zagadnienia. Nie będziemy poświęcać im tu uwagi, tym bardziej iż założenia praktyczne rozwiniętego w części drugiej przykładu

operują dokładnościami wielokrotnie niższymi. Zatrzymamy się natomiast nad efektem dwóch pierwszych czynników wymienionych w punkcie a i b.

Zagadnienie ruchu satelity w polu grawitacyjnym spłaszczonej planety w zasadzie nie jest problemem nowym, ponieważ rozwiązane zostało w odniesieniu do teorii ruchu księżyców wielkich planet a także ruchu Księżyca ziemskiego. Jednakże orbity sztucznych satelitów Ziemi podlegają całemu szeregowi właściwości, które w sposób bardzo wyraźny odróżniają je od orbit znanych dotychczas satelitów naturalnych. Decydującą rolę odgrywa tu duże nachylenie płaszczyzn orbitalnych sputników do płaszczyzny równika Ziemi oraz znaczne zbliżenie do jej powierzchni. Z tej przyczyny dotychczasowe teorie odniesione do satelitów o małym kącie nachylenia i o znacznym oddaleniu od macierzystej planety nie mogą być wykorzystane dla teorii sztucznego satelity Ziemi.

Dla pierwszych sztucznych satelitów Ziemi, z uwagi na ich stosunkowo niedużą wysokość w perigeum, główną siłą perturbującą ruch sputnika dookoła środka mas jest opór atmosfery. Momenty grawitacyjnych sił Ziemi stają się istotne dopiero w odniesieniu do satelitów posiadających dużą wysokość w perigeum, jak również do satelitów posiadających dowolną wysokość w perigeum, lecz o dość znacznie różniących się momentach bezwładności. Dla sztucznych satelitów mających wysokość 500 km i wyżej, siły aerodynamiczne stają się nieznaczne i podstawowe znaczenie posiadają perturbacje pochodzenia grawitacyjnego.

Teoria ruchu sztucznego satelity Ziemi pod działaniem sił grawitacyjnych prowadzi do następujących związków wiekowych zmian elementów orbity [15]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{A}{2p^2} (4 - 5 \sin^2 i) + \frac{B}{10p^4} \left[\left(\frac{24}{7} + \frac{27e^2}{7} - \frac{9e^2 \cos 2\omega}{7} - \sin^2 i \right) \frac{93}{7} - \frac{9 \cos 2\omega}{7} + \frac{27e^2}{2} - \frac{165e^2 \cos 2\omega}{14} (+ \sin^4 i) \frac{21}{2} + \frac{81e^2}{8} - \frac{3 \cos 2\omega}{2} - \frac{27e^2 \cos 2\omega}{2} \right], \quad (31)$$

$$\frac{da_{\Omega}}{dt} = -\frac{\cos i}{p^2} \left[A + \frac{2B}{5p^2} \left(\frac{3}{7} + \frac{9e^2}{14} - \frac{9e^2 \cos 2\omega}{28} \right) - \frac{2B \sin^2 i}{5p^2} \left(\frac{3}{4} + \frac{9e^2}{8} - \frac{3e^2 \cos 2\omega}{4} \right) \right], \quad (32)$$

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{e \sin^2 i \sin 2\omega B (1-e^2)}{20p^2} \left(\frac{18}{7} - 3 \sin^2 i \right),$$

$$\frac{di}{dt} = - \frac{3Be^2 \sin 2i \sin 2\omega (6 - 7 \sin^2 i)}{280p^4},$$

gdzie: ω — argument perigeum,

α_{Ω_e} — rektascenzja węzła wstępującego,

a — duża półoś,

e — mimośród orbity sztucznego satelity,

i — nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny równika,

p — parametr orbity $= a(1-e^2)$

zaś współczynniki A i B występujące w rozłożonej w szereg postaci potencjału sferoidy ziemskiej równają się: $A=0,001\ 641$, $B=0,000\ 010\ 6$.

Wzory (31) i (32), uwzględniając wyrazy pierwszego rzędu, możemy przedstawić w postaci uproszczonej:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{2} A \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} n, \quad (31')$$

$$\frac{\Delta\alpha_{\Omega_e}}{\Delta t} = -A \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} n, \quad (32')$$

gdzie a — duża półoś ziemską, a' — duża półoś orbity SSZ, $n = \frac{2\pi}{P}$ średni ruch dobowy satelity, zaś współczynnik A wyraża się wzorem $A = \varepsilon - \frac{\omega^2 (a')^3}{f m_2}$, przy czym ε — spłaszczenie elipsoidy ziemskiej, ω — tu prędkość kątowna ruchu wirowego Ziemi.

Wreszcie możemy zatrzymać się na jeszcze bardziej uproszczonych wyrażeniach:

$$\frac{\Delta\omega}{1 \text{ obrót}} = \frac{\pi \varepsilon R^2}{a^2 (1-e^2)^2} (5 \cos^2 i - 1), \quad (31'')$$

$$\frac{\Delta\alpha_{\Omega_e}}{1 \text{ obrót}} = - \frac{2\pi \varepsilon R^2}{a^2 (1-e^2)^2} \cos i, \quad (32'')$$

po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\frac{\Delta\omega}{1 \text{ obrót}} = 0,294 N \frac{5 \cos^2 i - 1}{a^2 (1-e^2)^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\Delta\alpha_{\Omega_e}}{1 \text{ obrót}} = -0,588 N \frac{\cos i}{a^2 (1-e^2)^2}; \quad (34)$$

N — liczba obrotów na dobę.

Z treści wzorów 31—34 możemy się łatwo przekonać, że przy $i=0^\circ$ lub 180° wiekowy ruch węzła wstępującego osiąga maksimum, zaś przy $i=90^\circ$, $\Delta a_\Omega = 0$. Wiekowy ruch perigeum jest maksymalny dla satelitów posiadających nachylenie $i \cong 63,7^\circ$.

Z kolei przedstawiamy wzory wyrażające efekty perturbacyjne siły aerodynamicznej (oporu atmosfery) na elementy orbity [16]:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a\rho na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos v+e^2)^{3/2}, \quad (35)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{2a\rho na^2}{(1-e^2)^{1/2}}(1+2e\cos v+e^2)^{1/2}(e+\cos v), \quad (36)$$

$$\frac{da_\Omega}{dt} = 0,$$

gdzie ρ — gęstość atmosfery, $a=1/2C\frac{S}{m}$, C — współczynnik oporu aerodynamicznego, S — powierzchnia poprzecznego przekroju SSZ, m — masa sztucznego satelity.

Wpływ oporu atmosferycznego na okres obiegu sztucznego satelity P , która to wielkość jest związana z dużą półosią orbity a związkiem (12), możemy wyrazić wzorem przybliżonym (37), opierając się na znajomości zmiany wiekowej dużej półosi Δa :

$$\Delta P = \frac{2}{3} \Delta a \frac{P}{a}. \quad (37)$$

Pomiędzy Δe i Δa zachodzi związek

$$\frac{\Delta a}{a} = \Delta e (\cos M - e \cos 2M \dots). \quad (38)$$

Część II

Przykład obliczenia pozycji geograficznych i wysokości nad powierzchnią Ziemi sztucznego satelity 1958 $\delta 2$

6. Warunki zadania

Obserwatorium Zegrze (stacja obserwacji sztucznych satelitów Ziemi nr 157) wykonało w drugiej połowie maja 1958 r. cykl obserwacji na-

² Na marginesie powyższego zauważmy, że wartość przybliżoną spłaszczenia elipsoidy ziemskiej jesteśmy w stanie obliczyć choćby na mocy wzoru 31" lub 32". Można także odpowiedzieć na pytanie, jaka powinna być dokładność obserwacji sztucznego satelity Ziemi, aby można było wyznaczać niejednorodność skorupy ziemskiej.

Tablica 1

Nr obs.	Data	Czasu TU
53	1958. V. 22 ^d	8 ^h 36 ^m 38 39
54	V. 22	10 21 25 27
84	V. 24	15 30 32 36
99	V. 25	16 15 16 20
126	V. 27	14 02 04 10

sluchu radiowego sztucznego satelity Ziemi 1958 δ 2 (Sputnik III). W celu zdobycia materiału dokumentacyjnego dla potwierdzenia teorii rozchodzenia się fal radiowych w jonosferze (5) należało dla podanych niżej momentów obserwacji (początek sygnału, maksimum, koniec) obliczyć pozycje sztucznego satelity wyrażone we współrzędnych geograficznych oraz jego wysokości nad powierzchnią Ziemi i odległości po ortodromie od punktów podsatelitowych do stacji Zegrze. W niniejszym przykładzie podane są obliczenia dotyczące wybranych obserwacji, które podaje tablica 1.

7. Materiały wyjściowe

W celu rozwiązania na mocy wzorów 14—30 zadania sprecyzowanego w p. 6, należało rozporządzać wartościami parametrów orbity, wymienionych w końcu ust. 4 i odniesionych do pobliza epoki obserwacji nasłuchu radiowego stacji Zegrze, a także wartościami zmian wiekowych tych parametrów. W wyniku przeglądu wszelkich możliwych dokumentów udało się zgromadzić następujące dane:

$i = 65^\circ$ (Circ. Bureau Centr. de telegr. astr. Kopenhaga)

$P = 105,^m52$ $t_0 = \text{VI}, 20^{\text{d}}$ (IGY World data Center A

$\Delta P/1^{\text{d}} = -0,^m011$

Rockets and Satellites Nr 6)

$\omega = 49,6$

„

$\Delta \omega/1^{\text{d}} = 0,317$

„

$r_p = 6558,3 \text{ km}$

„

$H_p = 187,3 \text{ km}$

„

$H_A = 1880 \text{ km}$

„

$e = 0,112$

„

gdzie i nachylenie orbity, P — okres anomalistyczny, ω — argument perigeum, r_p — odległość od środka Ziemi do perigeum, H_p — wysokość nad powierzchnią Ziemi w perigeum, H_A — wysokość nad powierzchnią Ziemi w apogeum, e — mimośród orbity, t_0 — epoka, dla której podane były powyższe wartości.

Jak widać z powyższego zestawienia, osiągnięte materiały nie były kompletne, brak było bowiem wartości zmian w czasie elementów e , i , r , wartości rektascenzji węzła wstępującego α_Ω i jakiegokolwiek elementu wiążącego pozycję sztucznego satelity z czasem. Powstało zagad-

nienie obliczenia brakujących danych na podstawie materiału obserwacyjnego. Niestety, w okresie, w którym wykonane były obserwacje radiowe (druga połowa maja, początek czerwca) nie wykonywano w Polsce obserwacji pozycyjnych. Od momentu wystrzelenia (15 V 1958 r.) do połowy czerwca Sputnik 3 nie był widoczny nocą na polskim niebie, później zaś nastąpił okres niesprzyjającej pogody. Obliczanie brakujących elementów orbity na podstawie obserwacji z końca czerwca i lipca pociągnąć mogło za sobą duże błędy wynikające z ekstrapolacji. Wobec tego oparto się na materiałach zagranicznych, opublikowanych w jednym z zeszytów „IGY World Data Center A., Rockets and Satellites” [8]. Z podanej tam listy obserwacji, wykonanych w maju 1958 przez stacje obserwacyjne różnych kontynentów, wybrano te, które przytacza tablica 2.

Tablica 2

Lp.	Stacja	Czas TU	α	δ	a_n	h
1	Johanesburg *	V. 23 ^d 03 ^h 36 ^m 20 ^s	02 ^h 55 ^m	-42° 00'	0° 24'	53° 30'
2	„	V. 23 03 36 23	02 54	-41 30		
3	Pretoria	V. 23 03 36 52	02 49	-36 12		
4	Capetown	V. 27 18 05 25				
5	Sydney	V. 27 18 44 32,5	23 44	-30 30		
6	Pretoria	V. 29 02 27 40	02 18	-69 00		
7	Pretoria	V. 29 02 30 27	01 28	-30 18		
8	Sacramento *	VI. 14 11 37 24,9	22 23 47	-17 02		
9	„	VI. 14 11 37 36,0	23 02 53	-08 01		
10	Walnut Creek	VI. 14 11 37 28,6	22 14 18	-08 45		
11	„	VI. 14 11 37 44,3	23 02 18	-07 36		
12	Sacramento *	VI. 14 11 32 18,7	01 37 59	+52 32		
13	Walnut Creek	VI. 14 11 39 05,2	03 54 30	+39 30		
14	Oakland	VI. 14 13 29 59	02 65	+25		
15	Bryn Athyn	VI. 17 08 16 29	19 10	+68		
16	Cambridge	VI. 17 08 16 51			273 30	35 30
17	Cambridge	VI. 17 08 17 52			1 18	29 30

* Do obliczeń przyjęto średnią z dwu obserwacji.

Współrzędne geograficzne stacji podaje tablica 3.

Tablica 3

Lp.	Stacja	λ_E	φ_N
1	Bryn Athyn (USA)	284° 56'	+40° 08'
2	Cambridge (USA)	288 52	+42 23
3	Capetown (Unia Płd.-Afr.)	18 02	-33 56
4	Johanesburg (Unia Płd.-Afr.)	28 04	-26 11
5	Oakland (USA)	237 48	+37 47
6	Pretoria (Unia Płd.-Afr.)	28 12 42'' 58	-25 43 43'' 56
7	Sacramento (USA)	238 14 51,0	+38 32 55,8
8	Sydney (Australia)	151 06	-33 55
9	Walnut (USA)	237 56 14	+37 57 52

Materiały powyższe zawierały zatem współrzędne geograficzne stacji, datę, godzinę, minutę, sekundę i jej ułamek w momencie obserwacji oraz współrzędne topocentryczne równikowe a i δ lub a i h pozycji zaobserwowanej Sputnika.

8. Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania w warunkach określonych sprowadziło się do zrealizowania następujących kolejnych etapów obliczeniowych i analitycznych:

I. Obliczenie drogą kolejnych przybliżeń współrzędnych geograficznych φ , λ punktów podsatelitowych dla poszczególnych momentów obserwacji astronomicznych, wymienionych w tabeli 2. Przy realizacji tego etapu korzystano m. in. z grupy wzorów 18—20, 26 oraz z wzorów pochodnych. Dla obliczenia odległości kątowej punktu podsatelitowego od stacji obserwacyjnej posłużono się wzorem (41), wyprowadzonym przez W. Opalskiego [11]. Oto przykłady ilustrujące tę część obliczeń.

Obserwacja nr 5, Pretoria V. 29^d 02^h 27^m 40^s

$$\alpha = 02^h 18^m \quad \varphi = -25^\circ 43' 44''$$

$$\delta = -68^\circ 00', \quad \lambda = 28^\circ 12' 43''$$

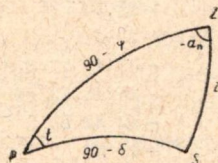
Pierwszą czynnością było przeliczenie zaobserwowanych, topocentrycznych współrzędnych równikowych na horyzontalne przy pomocy wzorów:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$$

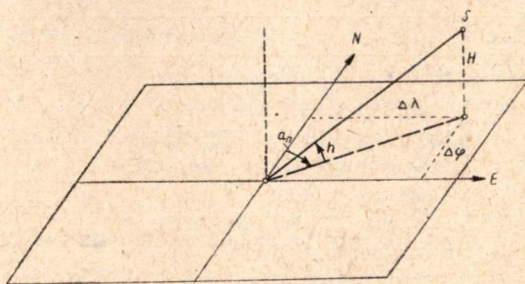
$$-\sin a_n = \frac{\cos \delta \sin t}{\sin z}.$$

W danym przypadku otrzymujemy

$$a_n = 156^\circ 36' 30'' \quad z = 63^\circ 41' 30''.$$



Rys. 4



Rys. 5

Następnie obliczamy w pierwszym przybliżeniu (rys. 5) współrzędne punktu podsatelitowego według wzorów:

$$\lambda'_s = \lambda_{Pr} + \Delta\lambda, \quad \varphi'_s = \varphi_{Pr} + \Delta\varphi,$$

$$\Delta\varphi = l \cdot \cos a_n \cdot \frac{3438'}{R},$$

$$\Delta\lambda = l \cdot \sin a_n \cdot \frac{3438'}{R \cos \varphi_s},$$

gdzie $R = 6371$ — średni promień Ziemi,

$$l = H \cdot \operatorname{ctg} h,$$

zaś

H obliczamy z wzorów

$$H = r - R,$$

gdzie

$$r = a \left[1 - e \cos M - \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1) \dots \right]; \quad (39)$$

półś duża bezpośrednio z danych wyjściowych:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R + H_A}{1 + e} = \frac{R + H_P}{1 - e} = 7403 \text{ km}^3, \\ M &= u - \omega - 2e \sin M, \\ \sin u &= \sin \varphi \operatorname{cosec} i. \end{aligned} \quad (40)$$

Liczbowo przedstawia się to następująco:

$$\omega_{v.29} = 49^\circ,6 + 22^d \cdot 0,317 = 56^\circ,6.$$

Ponieważ współrzędne punktu podsatelitowego nie są jeszcze znane, przyjmujemy w pierwszym przybliżeniu

$$\varphi_s \cong \varphi_{\text{Pret}}.$$

czyli tak, jak gdyby obserwacja była wykonana w zenicie. A zatem

$$\sin u = \sin(-25^\circ,7) \operatorname{cosec} 65^\circ = -0,434 \cdot 1,103 = -0,479$$

$$u = -28^\circ,6.$$

M zasadniczo należałoby również obliczyć metodą kolejnych przybliżeń z równania (40), jednak z uwagi na przybliżony charakter całego rachunku w tym fragmencie można przyjąć dla znalezienia $\sin 2M$ wartość M , wynikającą tylko z pierwszych dwóch członów wzoru, poprawioną o przypuszczalny wpływ trzeciego wyrazu. Wobec tego będzie:

³ W obliczeniach nie uwzględniono zmiany wartości a .

$$M = -28^{\circ}6' - 56^{\circ}6' + 0,224 \cdot 0,956 \cdot 3438' = -73^{\circ}0',$$

$$r = 7403 [1 - 0,112 \cdot 0,293 - 0,0063 (-0,8284 - 1)] = 7242 \text{ km},$$

$$H = 7242 - 6371 = 871 \text{ km},$$

$$l = 871 \cdot 2,0216 = 1761 \text{ km},$$

$$\Delta\varphi_s = -1761 \cdot 0,9178 \cdot 0,5396 = -14^{\circ}5',$$

$$\Delta\lambda_s = 1761 \cdot 0,3970 \frac{0,5396}{0,9008} = +7^{\circ}0',$$

skąd

$$\varphi_s \cong 39^{\circ}.$$

Drugie przybliżenie robimy rozwiązując to samo zadanie na kuli i posługując się zamiast długością l — kątem środkowym ζ , który obliczamy przy pomocy wzoru

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sqrt{1 + (1 + \operatorname{ctg}^2 h) \frac{2H}{R}} - 1}{\operatorname{tg} h + \operatorname{ctg} h} \quad (41)$$

Jednocześnie należy obliczyć jeszcze raz, tą samą drogą co poprzednio, wysokość H :

$$\sin u = -0,62932 \cdot 1,1034 = -0,69439,$$

$$u = -43^{\circ}59',$$

$$M = -87^{\circ}46',$$

$$r = 7464 \text{ km},$$

$$H = 7464 - 6371 = 1093 \text{ km}.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (41) mamy

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sqrt{1 + (1 + 4,08687) \cdot 0,34312} - 1}{2,51600} = 0,26110,$$

$$\zeta = 14^{\circ}38',$$

φ_s i λ_s ostatecznie obliczamy przy pomocy wzorów

$$\sin \varphi_s = \cos \zeta \sin \varphi_{\text{Pret.}} + \sin \zeta \cos \varphi_{\text{Pret.}} \cos a_n,$$

$$\sin \Delta\lambda_s = \frac{\sin a_n \sin \zeta}{\cos \varphi_s}.$$

Po podstawieniu liczb mamy

$$\sin \varphi_s = -0,96756 \cdot 0,43411 - 0,25263 \cdot 0,90085 \cdot 0,91781 = -0,62813,$$

$$\varphi_s = 38^{\circ}55' \text{ S},$$

$$\sin \Delta \lambda_s = \frac{0,39701 \cdot 0,25263}{0,77806} = +0,12891,$$

$$\sin \Delta \lambda_s = +7^\circ 24',$$

$$\lambda_s = 35^\circ 37' \text{ E}.$$

W pewnych przypadkach, kiedy obserwacja SSZ wykonana była w pobliżu perigeum, stosowano jeszcze bardziej uproszczoną metodę obliczenia współrzędnych punktu podsatelitowego. Z uwagi na stosunkowo niewielką wysokość (ok. 200 km), a co za tym idzie niewielkie odległości l , można ograniczyć się do rozwiązania zadania na płaszczyźnie. Oto dla przykładu redukcja obserwacji nr 12:

Bryn Athyn VI. $17^d 08^h 16^m 29^s$; $\alpha = 19^h 10'$ $\delta = +68^\circ$

$$\varphi_{BA} = +40^\circ 08', \quad \lambda_{BA} = 284^\circ 56'.$$

Po przeliczeniu współrzędnych równikowych na horyzontalne otrzymano

$$a_n = 341^\circ 11', \quad h = 58^\circ 37'.$$

Postępując tą drogą co poprzednio, obliczamy

$$\omega_{V.17} = 49^\circ 6' + 3^d 0,317 = 50^\circ 55' = 50^\circ 33',$$

$$\sin u = 0,6446 \cdot 1,1034 = 0,7119,$$

$$u = 45^\circ 23'.$$

$$M = +45^\circ 23' - 50^\circ 33' + 0,224 \cdot 0,070 \cdot 3438' = -4^\circ 15',$$

$$r = 7403(1 - 0,112 \cdot 0,9973) = 6577 \text{ km}.$$

W ostatnim podstawieniu, z uwagi na małą wartość M , pominięto trzeci wyraz.

$$H = 6577 - 6371 = 206 \text{ km}.$$

$$l = 206 \cdot 0,6100 = 126 \text{ km},$$

$$\Delta \varphi_s = \frac{126 \cdot 0,94656 \cdot 3438'}{6371} = +1^\circ 04',$$

$$\Delta \lambda_s = \frac{-126 \cdot 0,32251 \cdot 3438}{6371 \cdot 0,76455} = -0^\circ 29'.$$

Mając powyższe, od razu obliczamy φ_s i λ_s z dostateczną dokładnością:

$$\varphi'_s = 41^\circ 12', \quad \lambda_s = 284^\circ 27'.$$

W opisany wyżej sposób zredukowano wszystkie, obserwacje zamieszczone w tablicy 2; otrzymano przy tym wyniki, które podaje tablica 4.

Tablica 4

Lp.	Stacja	Data	φ	λ (E)
1	Joh.	V. 23 ^d	-37° 21'	43° 44'
2	Pret.	V. 23	-33 57	44 53
3	Cap.	V. 27	-20 59	18 03
4	Syd.	V. 27	-34 13	157 18
5	Pret.	V. 29	-38 55	35 37
6	Pret.	V. 29	-36 18	53 04
7	Sac.	VI. 14	+36 34	239 54
8	W. Cr.	VI. 14	+35 54	239 35
9	Secr.	VI. 14	+39 04	242 14
10	W. Cr.	VI. 14	+45 54	251 04
11	Oak.	VI. 14	+38 12	238 32
12	Br. At.	VI. 17	+41 12	284 27
13	Cam.	VI. 17	+42 13	285 19
14	Cam.	VI. 17	+45 41	288 58

II. Obliczenie brakujących elementów orbity na podstawie wyników I etapu oraz przez uwzględnienie danych wyjściowych dla poszczególnych momentów obserwacji astronomicznych, a mianowicie: obliczenie dla pewnej epoki momentu przejścia sztucznego satelity przez węzeł wstępujący T_{Ω} , obliczenie — dla tejże epoki — długości geograficznej węzła wstępującego λ_0 , a dalej obliczenie dla pewnej epoki wartości rektascenzji węzła wstępującego α_{Ω} . Ponadto w tym etapie pracy obliczono zmiany: $\Delta\lambda_0/1$ obrót, $\partial\lambda_0/(1 \text{ obrót})^2$, i $\Delta\alpha_{\Omega}/1^d$.

Dla zrealizowania tego zadania należało przejść od położenia satelity w momencie obserwacji do jego pozycji (długości) w chwili przejścia przez płaszczyznę równika, oraz od momentu obserwacji T_i do momentu przejścia przez węzeł wstępujący $T_{\Omega i}$.

Posługujemy się wzorami:

$$T_i - T_{\Omega i} = \frac{u}{360^\circ} P^m, \quad (42)$$

gdzie P — okres, zaś $\sin u = \sin \varphi_s \operatorname{cosec} i$

$$\lambda_s - \lambda_{0i} = \Delta\lambda' - \Delta\lambda'', \quad (43)$$

Pierwszy wyraz prawej strony oblicza się wzorem:

$$\sin \Delta\lambda' = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} i. \quad (44)$$

Wyraz drugi wynika z ruchu obrotowego Ziemi i wyraża się związkiem:

$$\Delta\lambda'' = \frac{u}{360^\circ} P^\circ \quad (45)$$

gdzie

$$P^o = \frac{P^m}{4}.$$

Oto tok obliczeń na przykładzie obserwacji nr 12:

$$\sin \Delta\lambda' = +0,87543 \cdot 0,46631 = +0,40822,$$

$$\Delta\lambda' = +24^{\circ}06',$$

$$\sin u = +0,65869 \cdot 1,10338 = +0,72679,$$

$$u = +46^{\circ}7',$$

$$\frac{u}{360^{\circ}} = +0,12972,$$

$$P^o = \frac{1}{4} [105,52 - 0,011 (17^d - 20^d)] = 26^{\circ}39'.$$

Podstawiając do (45) mamy

$$\Delta\lambda'' = +0,12972 \cdot 26^{\circ}39' = +3^{\circ}25',$$

a stąd

$$\lambda_{0i} = 284^{\circ}27' - 24^{\circ}06' + 3^{\circ}25' = 263^{\circ}46'.$$

Stosując wyżej opisane postępowanie do wszystkich obserwacji otrzymano wyniki zanotowane w tablicy 5.

Tablica 5

Lp.	λ_{0i}	λ_{0i} śr.	Lp.	λ_{0i}	λ_{0i} śr.
1	87°57' }	87°38	8	222°49' }	222°92
2	86 48 }		9	223 16 }	
3	202 40 }	201,40	10	226 09 }	—
4	200 09 }		11	220 10 }	
5	79 56 }	79,94	12	263 46 }	263,95
6	96 32 }		13	263 48 }	
7	222 41 }	—	14	264 15 }	

Wyniki ujęte klamrami odnoszą się do tych samych momentów $T_{\Omega i}$ (obserwacje bliskie w czasie, w ciągu tego samego obrotu), nie powinny więc się od siebie różnić. Niezgodności pochodzą od błędów obserwacyjnych. Wyniki obarczone błędami grubymi (*) odrzucono, z pozostałych zaś utworzono średnie.

Aby przejść od λ_{0i} uśrednionych do λ_0 na pewną wybraną epokę, należało te pierwsze sprowadzić do jakiegoś wspólnego układu odniesienia. W tym celu trzeba było policzyć ilość pełnych obrotów, wykonanych

przez SSZ. między poszczególnymi epokami T^{Ω} . Wartości $T_{\Omega i}$ obliczono zgodnie z wzorem (42) z dokładnością do 1^m ; dalsze obliczenia przedstawia tablica 6.

Tablica 6

L. p.	T_i	$T_i - T_{\Omega i} =$ $= \frac{u}{360} P^m$	$T_{\Omega i}$	Odstęp czasu między kolejnymi momentami $T_{\Omega i}$
1	V. 23 ^d 3 ^h 36 ^m	1 ^h 33 ^m	2 ^h 03 ^m	111 ^h 04 ^m = 6664 ^m
2	3 37	1 34	2 03	
3	V. 27 18 05	0 59	17 06	
4	18 44	1 37	17 08	31 ^h 48 ^m = 1908 ^m
5	V. 29 2 28	1 33	0 55	
6	2 30	—	0 55	394 ^h 30 ^m = 23670 ^m
7	VI. 14 11 37	0 12	11 25	
8	11 38	0 13	11 25	
9	11 38	0 13	11 25	
10	11 39	—		68 ^h 38 ^m = 4118 ^m
11	13 30	—		
12	VI. 17 8 16	0 14	8 02	
13	8 17	0 14	8 03	
14	8 18	0 15	8 03	

Ilość pełnych obrotów $n = \frac{\text{odstęp czasu}}{P^m}$ w poszczególnych interwałach odpowiednio wynosi: 63, 18, 224, 39.

Mając wartość n , możemy obliczyć odstępy wyrażone w mierze stopniowej między poszczególnymi wartościami λ_{0i} . Wynoszą one odpowiednio:

1685,98

481,46

5977,02

1038,97

Dzieląc je przez kolejne n otrzymujemy $\Delta\lambda_0$:

— 26,76

— 26,75

— 26,68

— 26,64

Jak widać wartości $\Delta\lambda_0$ wykazują wyraźne zmiany w czasie, co jest zgodne z teorią. Dla sprowadzenia λ_{0i} oraz $\Delta\lambda_0$ do jednej epoki przeprowadzono wyrównanie, zakładając następującą postać równania błędu:

$$\lambda_0 + n \cdot \Delta\lambda_0 + n^2 \cdot \partial\lambda_0 - \lambda_{0i} = v.$$

Jako epokę wybrano moment pierwszego przejścia Sputnika przez węzeł wstępujący po VI. 1^a 0^h i od niego liczono całkowitą ilość obrotów n do poszczególnych momentów T_{0i} . Taki właśnie wybór epoki uzasadniony był rozłożeniem w czasie zarówno obserwacji wyjściowych, astronomicznych; jak i radiowych. Wielkości λ_{0i} (średnie) zestawione w tablicy 5 poprawiono o całkowitą ilość kątów pełnych w taki sposób, żeby zero otrzymanej osi liczbowej znajdowało się w pobliżu wybranej epoki. Otrzymano układ równań błędów, a następnie układ równań normalnych, który rozwiązano metodą pierwiastka krakowianowego (tablica 7).

Tablica 7

Lp.	a	b	c	l	s
5	1	+222	+49284	+5 856,05	+55 363,05
4	1	+183	+33489	+4 817,08	+38 490,08
3	1	- 41	+ 1681	-1 159,94	+ 481,06
2	1	- 59	+ 3481	-1 641,40	+ 1 781,60
1	1	-122	+14884	-3 327,38	+11 435,62

	a	b	c	l	s
a	+5	+ 183	+ 102 819	+ 4 544,41	+ 107 551,41
b		+102 819	+ 14 979 387	+ 2 731 909,24	+ 17 814 298,24
c		+102 819	+3 786 902 355	+392 740 463,86	+4 194 725 024,86

+2,235 907	+ 81,846	+ 45 985,30	+ 2 032,47	+ 48 101,92
	+310,032	+ 36 175,86	+ 8 275,14	+ 44 761,02
		+ 19 067,31	- 4,38	+ 19 062,68

$$+64,276 \quad -26,7180 \quad +0,00023$$

$$\lambda_0 = 64^{\circ}276,$$

$$\Delta\lambda_0 = -26,7180,$$

$$\partial\lambda_0 = + 0,000 230.$$

Obliczona tu wartość zmiany $\Delta\lambda_0$ zawiera w sobie dwa człony: jeden powodowany obrotem Ziemi, drugi zmianą rektascenzji węzła wstępującego. Istnienie wyrazu $\partial\lambda_0$ spowodowane jest skracaniem się okresu P

na skutek oporu atmosfery. Należy dodać, że funkcja, według której naprawdę zmienia się długość geograficzna węzła wstępującego jest nie tylko bardzo skomplikowana, ale i nieznana, podane zaś tu równanie błędu jest tylko pewną jej aproksymacją, w takim przedziale czasu wystarczająco dobrą.

Następną czynnością jest obliczenie na tą samą epokę wartości T_{Ω} . Osiągamy to mnożąc P przez ilość obrotów n i dodając lub odejmując od $T_{\Omega i}$ (tablica 8).

Tablica 8

Lp.	P_i	$nP_i = \Delta T_i$	ΔT_i^d	$T_{\Omega i}^d$	T_{Ω}
1	105 ^m 790	+215 ^h 06 ^m 38	+ 8 ^d 962 75	V. 23 ^d 085 41	VI. 1 ^d 048 16
2	772	+104 00, 55	+ 4, 333 70	V. 27, 713 33	1, 047 03
4	756	+ 72 16, 00	+ 3, 011 12	V. 29, 038 33	1, 049 45
3	661	-322 15, 96	-13, 427 77	VI. 14, 475 83	1, 048 06
5	645	-390 53, 19	-16, 286 91	VI. 17. 335 41	1, 048 50
					śr. 1 ^d 048 24

Po przeliczeniu mamy

$$T_{\Omega} = \text{VI} \cdot 1^d 01^h 09^m 28^s.$$

Warto zauważyć, że przy obliczeniu $T_{\Omega i}$ (patrz tabl. 6) ograniczono dokładność do minut, podczas gdy dane obserwacyjne podawały sekundy. Jednakże faktyczna — znacznie mniejsza — dokładność obserwacji oraz stosowane tu przybliżone wzory powodują większe rozbieżności, niż te, które wynikają z zaokrągleń. Żądana w zadaniu dokładność zostaje mimo to zachowana.

Następnym i ostatnim już krokiem do otrzymania wszystkich niezbędnych elementów orbity było obliczenie wartości rektascenzji węzła wstępującego i jej zmiany dobowej. Postępujemy tu podobnie jak przy poprzednich obliczeniach λ_0 i T_{Ω} , to znaczy obliczamy $a_{\Omega i}$ kolejno poszczególnych obserwacji wyjściowych, a następnie, mając je rozłożone w czasie, sprowadzamy do jednej epoki i obliczamy zmianę. Dla zrealizowania powyższego korzystamy ze związków wyprowadzonych w części pierwszej:

$$\lambda_s - \lambda_{\Omega} = a_s - a_{\Omega}$$

oraz

$$a_s = \Theta_s^*.$$

Ostatnia równość jest ważna nie tylko dla punktu, w którym w danej chwili znajduje się satelita, ale dla każdego punktu na sferze niebieskiej i jego rzutu środkowego na kulę ziemską. Wobec tego rektascenzja węzła wstępującego w momencie T równa będzie czasowi gwiazdowemu miejsca,

nad którym, na sferze w momencie T , przecina się płaszczyzna orbity z płaszczyzną równika. To zaś będzie się równało

$$\theta_{\Omega i}^* = \theta_{Gr}^* + \lambda_s - \Delta\lambda' = a_{\Omega i}.$$

θ_{Gr}^* znajdziemy łatwo mając podany moment obserwacji w czasie uniwersalnym. Suma dwóch następnych wyrazów stanowi długość geograficzną węzła wstępującego w momencie obserwacji i była już obliczona we wcześniejszej fazie obliczeń.

Oto wyniki obliczeń wykonanych według powyższych wzorów, dla obserwacji nr 12:

$$\begin{aligned} TU &= 8^h 16^m 29^s, \\ \theta_{Gr}^* &= 1^h 56^m 48^s,7 = 29^\circ 12' 10'', \\ \lambda_s &= 41^\circ 12', \\ \Delta\lambda' &= 24^\circ 06', \\ a_{\Omega i} &= 289^\circ 33'. \end{aligned}$$

Przeliczenie pozostałych obserwacji dało wyniki zestawione w tabelicy 9.

Tablica 9

Lp.	$a_{\Omega i}$	L. p.	$a_{\Omega i}$
1	358°55'	8	296°31'
2	357 36	9	296 50
3	344 19	10	299 20
4	341 44	11	321 50
5	339 45 *	12	289 33
6	357 40	13	289 35
7	296 18	14	289 59

Wyniki ujęte klamrą odnoszą się do pobliskich epok i winny się mało między sobą różnić. Niektóre z nich (6, 10 i 11) znacznie odbiegały od pozostałych, wskazując na obecność grubych błędów w obserwacji i te zostały wyeliminowane z dalszych obliczeń. Pozostałe w poszczególnych grupach uśredniono, przypisując im epoki równające się średnim z momentów obserwacji. Otrzymano w ten sposób tablicę 10.

Tablica 10

Lp.	T_i	$a_{\Omega i}$
1	V. 23 ^d , 1504	358°2584
2	V. 27, 7671	342, 8083
3	V. 29, 1025	339, 7500
4	VI. 14, 4846	296, 5500
5	VI. 17, 3454	289, 7167

Podobnie jak przy obliczeniu wartości λ_0 , zastosowano wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów. Przyjęto następującą postać równania błędu:

$$\alpha_{\Omega 0} + \Delta t \cdot \Delta \alpha_{\Omega} - \alpha_{\Omega i} = v.$$

Po rozwiązaniu układu równań normalnych otrzymano następujące wartości poszukiwanych niewiadomych:

$$\alpha_{\Omega 0} = 332^{\circ}85; \quad \Delta \alpha_{\Omega} = -2^{\circ}63/1^d$$

na epokę 1958 VI 1^d,0.

Wiadomo jednak, że wartość $\Delta \alpha_{\Omega}$ można obliczyć niezależnie od obserwacji, a opierając się na znanej wartości spłaszczenia Ziemi, zgodnie z wzorem (32").

Otrzymana tą drogą wartość

$$\Delta \alpha_{\Omega} = -2^{\circ}51/1^d.$$

Analizując tę rozbieżność wyników, trzeba wziąć pod uwagę, że matematyczne formuły użyte tu do obliczeń ani w jednym, ani w drugim wypadku nie opisują ściśle warunków fizycznych, w jakich zachodzi badane zjawisko. Z jednej strony zmiana rektascenzji węzła wstępującego nie przebiega liniowo, a według jakiejś mocno skomplikowanej funkcji, z drugiej zaś podany powyżej wzór uwzględnia tylko jeden czynnik spośród wielu wymienionych w części pierwszej, wpływających na ruch sztucznego satelity. Po wnikliwej analizie postanowiono przyjąć do dalszych obliczeń wartość zaokrągloną, równą:

$$\Delta \alpha_{\Omega} = -2^{\circ}6.$$

III. Znając już wszystkie potrzebne czasowo-przestrzenne elementy orbity można przystąpić do drugiej części zadania, tj. do obliczenia współrzędnych geograficznych Sputnika w momentach podanych w tablicy 1. Pierwszą fazą tego obliczenia, a trzecim etapem całości, będzie ekstrapolacja wartości elementów orbity na żądane momenty. Rachunek ten przytoczony jest w tablicy 11, której kolejne kolumny omówimy: kol. 1 i 2 podają datę i miejsce obserwacji; kol. 3 i 4 zawierają obliczenie ω_i według wzoru:

$$\omega_i = 49^{\circ}6 - 0^{\circ}317(t_i - t_0)^d \quad t_0 = \text{VI. } 20^d5$$

wskaźnikiem i będziemy teraz oznaczać przyporządkowanie danej wartości i -tej obserwacji radiowej;

kol. 5 zawiera obliczenie okresu P_i według wzoru:

$$P_i = 105^m 52 - 0,011(t_i - t_0)^d;$$

kol. 6 zawiera obliczenie ruchu średniego N

$$N = \frac{360^\circ}{p_m};$$

kol. 7 — 13 zawierają rozwiązanie metodą kolejnych przybliżeń równania:

$$-N \cdot x = \omega + 2e \cdot \sin Nx + \frac{5}{4} e^2 \sin 2Nx, \quad (46)$$

gdzie

$$N \cdot x = N(T_\Omega - T_p);$$

kolejne przybliżenia uszeregowane są w kierunku pionowym; jako pierwsze przybliżenie przyjmowano $Nx = \omega$. Dla obserwacji 53 i 54 wykonanych tego samego dnia przeprowadzono jedno obliczenie wspólne;

kol. 14 zawiera obliczenie okresu węzłowego P_Ω

$$P_\Omega = P + 0,0065;$$

kol. 15 i 16 zawierają wynik mnożenia P_Ω x ilość pełnych obrotów (obliczone w kol. 23);

kol. 17 zawiera wartość $T_{\Omega i}$ powstałą przez odjęcie (16) od $T_\Omega = VI. 1^d 01^h 09^m,5$;

kol. 18 podaje — celem ułatwienia dalszych obliczeń — T_i wyrażone w dniach;

kol. 19, 20 i 21 zawierają obliczenie rektascenzji węzła wstępującego na moment obserwacji;

kol. 22—27 zawiera obliczenie λ_{0i} dla obrotów odpowiadających momentom obserwacji;

kol. 28 podaje czas gwiazdowy przejścia satelity przez węzeł wstępujący:

$$\Theta_{\Omega i}^* = a_{\Omega i} - \lambda_{0i}.$$

Ponieważ jednak $a_{\Omega i}$ liczona była na moment obserwacji należy wprowadzić poprawkę za różnicę $T_i - T_{\Omega i}$;

kol. 29 zawiera różnicę $T_i - T_{\Omega i}$ wyrażoną w dniach;

kol. 20 w drugim wierszu zawiera odpowiadającą temu poprawkę rektascenzji;

kol. 30 zawiera $T_{\Omega i}$ obliczone po raz drugi przez przeliczenie z czasu gwiazdowego (z uwzględnieniem wspomnianych poprawek);

kol. 31 zawiera średnie z (17) i (30)

kol. 32 podaje czas przejścia przez perigeum $T_p = (31) - (13)$.

Tablica 11

Nr obs.	Data	T_i	$(T_i - T_0)^d$ $T_0 = \text{VI. 20}^d, 5$	ω_i	P_i	$N = \frac{360}{P_i}$
	1	2	3	4	5	6
53	V. 22 ^d	8 ^h 36 ^m 38 39	-29 ^d ,2	58°86	105 ^m ,84	3,4014
54	V. 22	10 21 25 27	-29,1	58,82	105,84	3,4014
84	V. 24	15 30 32 36	-26,9	58,13	105,82	3,4020
99	V. 25	16 15 16 20	-25,9	57,81	105,81	3,4023
126	V. 27	14 02 04 10	-23,9	57,18	105,78	3,4033

Tablica 11d.c.

Nr obs.	Nx $\sin Nx$	$2Nx$ $\sin 2Nx$	$-b \sin Nx$ $b = 12,83425$	$-c \sin 2Nx$ $c = 0,898398$	Nx_0	$2Nx_0$	$T_\Omega - T_p$
	7	8	9	10	11	12	13
53	-58°48'	-117°36'					
i	-0,85536	-0,88620	+10,978	+0,796	-47°02'	-94°04'	
54	-0,73175	-0,99748	+9,391	+0,896	-48 31	-97 02	
	-0,74915	-0,99248	+9,614	+0,892	-48 17	-96 34	
	-0,74644	-0,99344	+9,580	+0,893	-48 20	-96 40	-14 ^m ,21
	-0,74703	-0,99324	+9,587	+0,892	-48 19		
84	-58°12'	-116°24'					
	-0,84989	-0,89571	+10,908	+0,805	-46 29	-92 58	
	-0,72517	-0,99866	+9,307	+0,897	-48 00	-96 00	
	-0,74314	-0,99452	+9,538	+0,893	-47 43		-14,04
99	-57°48'	-115°36'					
	-0,84619	-0,90183	+10,860	+0,810	-46 08	-92 16	
	-0,72095	-0,99922	+9,253	+0,898	-47 39	-95 18	
	-0,73904	-0,99572	+9,485	+0,895	-47 27		-13,95
126	-57°12'	-114°24'					
	-0,84057	-0,91068	+10,788	+0,818	-45 35	-91 10	
	-0,71427	-0,99979	+9,167	+0,898	-47 08	-94 16	
	-0,73294	-0,99723	+9,407	+0,896	-46 54	-93 48	
	-0,73016	-0,99780	+9,371	+0,896	-46 56		-13,80

Tablica 11 d.c.

Nr obs.	P_{Ω}	$(n \cdot P_{\Omega})^m$	$(n \cdot P_{\Omega})^d$	$T_{\Omega i}$
	14	15	16	17
53	105 ^m 7932	13964 ^m 7024	-9 ^d 16 ^h 44 ^m 70	8 ^h 24 ^m 80
54	105, 7932	13858, 9092	-9 14 58, 91	10 10, 59
84	105, 7822	10684, 0022	-7 10 04, 22	15 05, 28
99	105, 7768	9202, 7768	-6 09 22, 58	15 46, 92
126	105, 7658	6451, 7138	-4 11 31, 71	13 37, 79

Tablica 11 d.c.

Nr obs.	T_i^d	$T_i - T_{VI} \cdot 1^d 0$	α_{Ω}°	α_{Ω}^h	$T_i - T_0$ $T_0 = VI. 1^d 0482$	Ilość pełnych obrotów n
	18	19	20	21	22	23
53	V. 22 ^d 3583 3597 3604	-9 ^d 6417	357 ^o 916 + 38	2 ^h 51 ^m 7 + 2, 3	-9,6899	-132
54	V. 22,4312 4340 4354	-9,5688	357,729 + 36	23 50, 9 + 2, 2	-9,6170	-131
55	V. 24,6458 6472 6500	-7,3542	351,971 + 49	23 27, 9 + 2, 9	-7,4024	-101
99	V. 25,6771 6778 6806	-6,3229	349,290 + 50	23 17, 2 + 3, 0	-6,3711	-87
126	V. 27,5847 5861 5903	-4,4153	344,330 + 36	22 57, 3 + 2, 2	-4,4635	-61

Tablica 11 d.c.

Nr obs.	$n \Delta \lambda_0$	$n^2 \circ \lambda_0$	λ_{0i}^0	λ_{0i}^h	$\Theta^* = \alpha_{\Omega} - \lambda_{0i}$
	24	25	26	27	28
53	+3526 ^o 776	+4 ^o 008	355 ^o 060	23 ^h 40 ^m 3	+0 ^h 11 ^m 4
54	+3500,058	+3,947	328,281	21 53, 1	+1 57, 8
84	+2698,518	+2,346	245,140	16 20, 6	+7 07, 3
99	+2324,466	+1,714	230,483	15 22, 0	+7 55, 2
126	+1629,798	+0,856	254,930	16 59, 7	+5 57, 6

Tablica 11 d.c.

Nr obs.	Δd	$T_{\Omega i}$	$\frac{(30) + (17)}{2}$	T_p
	29	30	31	32
53	-0,0146	8 ^h 15 ^m 8	8 ^h 20 ^m 3	8 ^h 34 ^m 5
54	-0,0139	10 02, 0	10 06, 3	10 20, 5
84	-0,0188	15 03, 4	15 04, 3	15 18, 3
99	-0,0194	15 47, 3	15 47, 1	16 01, 1
126	-0,0139	13 41, 4	13 39, 6	15 53, 4

IV. Mając tak przygotowane elementy orbity możemy przystąpić do obliczenia ostatecznych współrzędnych punktów podsatelitowych. Posłużymy się jeszcze raz wzorami (21), (22), (43) i (45), dla obliczenia φ_s i λ_s . Występującą w nich wartość u otrzymamy z przekształconego wzoru (18):

$$u = \omega + M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M,$$

gdzie

$$M = (T_i - T_p) \frac{360}{P}. \quad (15)$$

Tablica 12 zawiera obliczenia wykonane według powyższych wzorów. Oto treść poszczególnych kolumn, w porządku numerycznym:

kol. 1 i 2 — data i moment obserwacji T_i ;

kol. 3 — $(T_i - T_p)$

kol. 4 — M wg. wzoru (48)

kol. 5—10 — obliczenie u wg wzoru (47)

kol. 11—13 — obliczenie φ_s , wzór (21)

kol. 14—16 — obliczenie $\Delta\lambda'$ zgodnie z wzorem (22)

kol. 17—19 — obliczenie $\Delta\lambda''$ wg wzoru:

$$\Delta\lambda'' = \frac{T_i - T_\Omega}{P} \cdot \Delta\lambda_0$$

kol. 20 — λ_{0i} z tablicy 11 kol. 26

kol. 21 — $\lambda_s = (20) + (16) + (19)$

Tablica 12

Nr. obs.	Data	T_i	$T_i - T_p$	M	$2M$	$\sin M$
	1	2	3	4	5	6
53	V. 22 ^d	8 ^h 36 ^m	+ 1,5	5,102	10° 12,2	+0,0889
		38	3,5	11,905	23 38,6	+0,2062
		39	4,5	15,306	30 36,8	0,2639
54	„	10 21	+ 0,5	1,701	3 24,2	+0,0297
		25	4,5	15,306	30 36,8	0,2639
		27	6,5	22,109	44 13,0	0,3762
84	V. 24	15 30	+11,7	39,803	79 36,4	+0,6401
		32	13,7	46,607	93 12,8	0,7266
		36	17,7	60,215	120 25,8	0,8679
99	V. 25	16 15	+13,9	47,292	94 35,0	+0,7349
		16	14,9	50,694	101 23,2	0,7738
		20	18,9	64,303	128 36,4	0,9011
126	V. 27	14 02	+ 8,6	29,268	58 32,2	+0,4889
		04	10,6	36,075	72 09,0	0,5887
		10	16,6	56,495	112 59,4	0,9206

Tablica 12 d.c.

Nr. obs.	$\sin 2M$	$2e \sin M$	$\frac{5}{4}e^2 \sin 2M$	u	$\sin u$	$\sin \varphi_s$	φ_s
	7	8	9	10	11	12	13
53	+0,1771 0,4038 0,5093	+ 1,141 2,646 3,387	+0,159 0,363 0,458	+ 65,262 73,774 78,011	+0,90826 0,96013 0,97821	+0,82317 0,87018 0,88656	+55°24' 60 29 62 27
54	+0,0593 0,5093 0,6974	+ 0,381 3,387 4,828	+0,053 0,458 0,627	+ 60,955 77,971 86,384	+0,87420 0,97803 0,99801	+0,79230 0,88640 0,90451	+52 24 62 26 64 45
55	+0,9836 0,9984 0,8622	+ 8,215 9,325 11,139	+0,884 0,897 0,775	+107,032 114,595 130,259	+0,95613 0,90655 0,76304	+0,86655 0,82162 0,69155	+60 04 55 15 43 45
99	+0,9968 0,9803 0,7815	+ 9,432 9,931 11,565	+0,896 0,881 0,702	+115,432 119,316 134,380	+0,90309 0,87193 0,71448	+0,81848 0,79024 0,64772	+54 56 52 12 40 22
126	+0,8529 0,9519 0,9206	+ 6,275 7,556 10,702	+0,766 0,855 0,827	+ 93,489 101,666 125,204	+0,99815 0,97934 0,81714	+0,90463 0,88759 0,74058	+64 46 62 34 47 47

$$\sin i = 0,90631$$

Tablica 12 d.c.

Nr obs.	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{tg} \Delta\lambda$	$\Delta\lambda$	$T_i - T_{\odot}$	$\frac{T_i - T_{\odot}}{p}$	$\partial\lambda$	λ_{oi}	λ_s
	14	15	16	17	18	19	20	21
53	+ 2,17083 + 3,4346 + 4,7114	+0,91744 1,45153 1,99113	42°32' 55 26 63 20	15 ^m 7 17,7 18,7	0,1483 0,1672 0,1767	-3°58' 4 28 4 43	355°04	33°38 46 02 53 41
54	+ 1,80034 + 4,6912 +15,821	+0,76085 +1,98259 +6,6863	37 16 63 14 81 30	14,7 18,7 20,7	0,1389 0,1767 0,1955	-3 43 4 43 5 14	328 17	1 50 26 48 44 33
84	- 3,2641 - 2,14777 - 1,18055	-1,37947 -0,90769 -0,49892	125 56 137 46 153 29	25,7 27,7 31,7	0,2428 0,2617 0,2996	-6 30 7 00 8 01	245 08	4 34 15 54 30 36
99	- 2,10284 - 1,78077 - 1,02176	-0,88870 -0,75259 -0,43182	138 22 143 02 156 39	27,9 28,9 32,9	0,2637 0,2731 0,3109	-7 03 7 18 8 19	230 29	1 48 6 13 18 49
126	-16,428 - 4,8430 - 1,41759	-6,9428 -2,04675 -0,59910	98 12 116 02 149 04	22,4 24,4 30,4	0,2117 0,2306 0,2874	-5 40 6 10 7 41	254 56	347 28 4 48 36 19

$$\cos i = 0,42262$$

Pozostało do obliczenia jeszcze: odległość sztucznego satelity od miejsca obserwacji — l i jego wysokość nad powierzchnią Ziemi — H . Pierwszą z tych wielkości obliczamy według wzoru:

$$\cos l = \sin \varphi_z \sin \varphi_s + \cos \varphi_z \cos \varphi_s \cos \Delta\lambda$$

Tablica 13

Nr obs.	$\sin \varphi_s$	$\cos \varphi_s$	$\sin \varphi_s \sin \varphi_z$	$\cos \varphi_s \cos \varphi_z$	$\Delta \lambda$	$\cos \Delta \lambda$	$\cos l$
	1	2	3	4	5	6	7
53	0,823 14	0,567 84	0,652 66	0,346 02	12° 36'	0,975 92	0,990 35
	0,870 21	0,492 68	0,689 98	0,300 22	25 00	0,906 31	0,962 07
	0,886 61	0,462 52	0,702 98	0,281 84	32 39	0,841 98	0,940 28
54	0,792 29	0,610 15	0,628 20	0,371 80	19 12	0,944 38	0,979 32
	0,886 47	0,462 78	0,702 87	0,282 00	5 46	0,994 94	0,983 44
	0,904 46	0,426 57	0,717 14	0,259 93	23 31	0,916 94	0,955 48
84	0,866 61	0,498 99	0,687 13	0,304 06	16 28	0,958 98	0,978 72
	0,821 65	0,570 00	0,651 48	0,347 34	5 08	0,995 99	0,997 43
	0,691 51	0,722 36	0,548 29	0,440 18	9 34	0,986 09	0,982 35
99	0,818 48	0,574 53	0,648 96	0,350 10	19 14	0,944 18	0,979 52
	0,790 16	0,612 91	0,626 51	0,373 48	14 49	0,966 75	0,987 57
	0,647 68	0,761 92	0,513 54	0,464 28	2 13	0,999 25	0,977 47
126	0,904 58	0,426 31	0,717 23	0,259 78	32 34	0,842 77	0,936 16
	0,887 55	0,460 72	0,703 73	0,280 74	16 14	0,960 13	0,973 28
	0,740 61	0,671 94	0,587 22	0,409 45	15 17	0,964 63	0,982 19
$\sin \varphi_z = 0,792\ 89 \quad \cos \varphi_z = 0,609\ 36$							

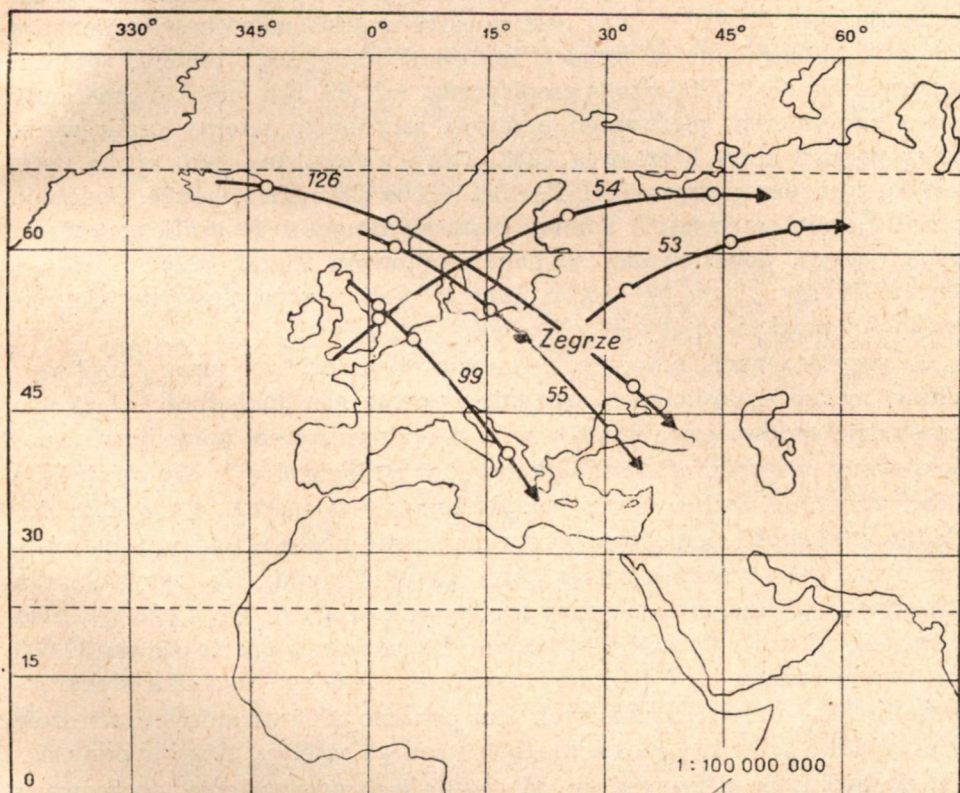
Tablica 13.d.c.

Nr obs.	l°	l km	$\cos M$	$\cos 2M$	$-0,006\ 272 \cdot (\cos 2M - 1)$	$-0,112 \cos M$	r	H
	8	9	10	11	12	13	14	15
53	7° 58'	887	+0,996 0	+0,984 2	+0,000 10	-0,111 55	6578	207
	15 50	1762	0,978 5	+0,914 8	+0,000 53	-0,109 59	6596	225
	19 54	2215	0,964 6	+0,860 6	+0,000 87	-0,108 04	6610	239
54	11 40	1299	+0,999 6	+0,998 2	+0,000 01	-0,111 96	6574	203
	10 26	1161	0,964 6	+0,860 6	+0,000 87	-0,108 04	6610	239
	17 10	1911	0,926 5	+0,716 7	+0,001 78	-0,103 77	6648	277
84	11 50	1317	+0,768 3	+0,180 5	+0,005 14	-0,086 05	6804	433
	4 07	458	0,687 1	-0,056 1	+0,006 62	-0,076 96	6882	511
	10 47	1200	0,496 7	-0,506 5	+0,009 45	-0,055 63	7061	690
99	11 37	1293	+0,678 2	-0,079 9	+0,006 77	-0,075 96	6891	520
	9 03	1007	0,633 4	-0,194 0	+0,007 49	-0,070 94	6933	562
	12 11	1356	0,433 7	-0,623 9	+0,010 19	-0,048 57	7119	748
126	20 35	2291	+0,872 4	+0,522 0	+0,003 00	-0,097 71	6702	331
	13 16	477	0,808 3	+0,306 5	+0,004 35	-0,090 53	6765	394
	10 50	1206	0,551 9	-0,390 5	+0,008 72	-0,061 81	7010	639

drugą zaś:

$$H = r - R = 7403[1 - 0,112 \cos M - 0,006272 (\cos 2M - 1)] - 6371.$$

Obliczenia te podane są w tablicy 13.



Rys. 6

9. Uwagi końcowe

W określonych warunkach, przy tylko częściowej znajomości elementów orbity, przedstawiony bieg rozwiązania tematu wydaje się najracjonalniejszy⁴. Przez szereg miesięcy od chwili zakończenia tematu nie rozporządzaliśmy dokładnymi danymi odnoszącymi się do elementów orbity Sputnika III, co umożliwiłoby kontrolę i porównanie otrzymanych wartości. Lecz tuż przed oddaniem niniejszego opracowania do druku otrzy-

⁴ Dokonano także próby obliczenia brakujących elementów orbity inną metodą, na podstawie wybranych obserwacji (polskich, radzieckich, czechosłowackich, niemieckich), wykonanych w miejscowym południku lub pierwszym wertykale. Z uwagi jednak na konieczność ekstrapolacji oraz niezbyt ściśle spełnienie warunku powyższego, otrzymano wyniki tylko w przybliżeniu podobne.

maliliśmy publikację z NRF [17], w której zamieszczone wartości, obliczone na podstawie znacznie obfitszego materiału wyjściowego wykazują zgodność z uzyskanymi przez nas.

Tak więc podana w [17] wartość zmiany dobowej rektascenzji węzła wstępującego $\Delta\lambda_{\Omega}/1^d = -2^{\circ},55$, jest zawarta w przedziale określonym wartościami obliczonymi w ramach realizacji niniejszego tematu, wzorem teoretycznym: $-2^{\circ},51$ i drogą empiryczną: $-2^{\circ},63$. Natomiast wyznaczony przez nas moment pierwszego przejścia sztucznego satelity przez węzeł wstępujący w dniu 1 czerwca 1958, który wybraliśmy jako epokę wyjściową, jest identyczny z [17] $T_{\Omega} = VI.1^d1^h09^m28^s = VI.1^d0,4824$. Podobnie kształtuje się porównanie zmiany dobowej długości geograficznej węzła wstępującego, powodowanej ruchem obrotowym Ziemi: [17] ... $\Delta\lambda_{\Omega} = -26^{\circ},76$, my ... $\Delta\lambda_{\Omega} = -26^{\circ},72$. Inne elementy także nie wykazują niezgodności przekraczających dokładność wyznaczeń.

Z przytoczonych powyżej fragmentów opracowania oraz tabel wyników, można wnioskować o osiągniętej przez nas dokładności. Jest ona wprawdzie zadowalająca jeżeli chodzi o praktyczny cel opracowania, podyktowany warunkami, wymienionymi w punkcie 6 i 7, ale otrzymane dane, obliczone wedle wzorów przybliżonych, w oparciu o nie dość dokładną znajomość elementów orbity oraz małą liczbę obserwacji astronomicznych, siłą rzeczy są wynikami przybliżonymi. Na przykład dla dokładnego obliczenia elementów orbity pierwszego radzieckiego sputnika w moskiewskim Instytucie Astronomii Teoretycznej oparto się na 60 000 obserwacji radiowych i 400 wizualnych, dla drugiego sputnika wykorzystano 13 000 obserwacji radiowych oraz przeszło 2000 wizualnych, wreszcie w przypadku trzeciego radzieckiego sztucznego satelity, tylko w odniesieniu do epoki: po 6 tygodniach od chwili jego wystrzelenia, opracowano 53 000 obserwacji radiowych i 1260 optycznych; wszystkie te obliczenia wykonano na szybkich maszynach elektronowych.

Mając na uwadze powyższe porównanie, pragniemy podkreślić eksperymentalny charakter niniejszego opracowania.

Kończąc, pragniemy spełnić miły obowiązek podziękowania doc. drowi W. Opalskiemu za merytoryczne uwagi w trakcie wykonywania pracy i za przejrzenie rękopisu.

LITERATURA

1. W. Opalski: Problematyka naukowa sztucznych satelitów Ziemi. *Biuletyn Polskich Obserwacji Sztucznych Satelitów*. Nr 1, 1960.
2. L. Cichowicz, B. Kołaczek: *Instrukcja dla kierowników i instruktorów stacji obserwacji wizualnych sztucznych satelitów Ziemi*. Komisja MRG. 1958.

3. *Biuletień stancij opticzeskogo nabliudienija iskusstwiennych sputnikow Ziemi.* Moskwa. Astronomiczeskij Sowiet A. N. SSSR.
4. *Biuletyn polskich obserwacji sztucznych satelitów.* Komitet MWG przy Prezydium PAN.
5. S. Manczarski: *Wkład Polskoj Narodnoj Respubliki w naucznyje issledowanija nakłona jonosfiernogo słoja.* 1959.
6. Priesler, Bennewitz, Lenguissier: *Radiobeobachtungen des Ersten Künstlichen Erdsatelliten.* Bonn, 1958.
7. *Circulaires, Bureau Centr. de télégr. astr.* Kopenhaga.
8. *IGY World data Center A.* Nr 6. Washington 1958.
9. L. Cichowicz. *Wyczislenije priblizitielnych koordinat podsputnikowych toczek dlia sputnikow 1957 a 2 i 1958 d 2 dlia danych momentow radioprijema.* Referat na III Konferencję przedstawicieli państw Europejsko-Azjatyckiego Regionu. Moskwa, luty 1959.
10. L. Cichowicz: *Obserwacje sztucznych satelitów Ziemi. Serwis informacji.* Nr 6. Komisja MRG przy Prezydium PAN. 1959.
11. W. Opalski. *Wzory robocze wiążące pozycje obserwowane Sztucznego Satelity Ziemi z jego położeniem w orbicie.* *Biuletyn Polskich Obserwacji SSZ.* Nr 2, 1960.
12. J. Zieliński: *Geodezyjne aspekty problematyki sztucznych satelitów Ziemi.* *Przegląd Geodezyjny* Nr 7/8, 1959.
13. L. Cichowicz: *Obserwacje i obliczanie orbit sztucznych satelitów Ziemi.* *Rocznik Astronomiczny na rok 1960.*
14. J. Zieliński: *Badanie ziemskiego pola grawitacyjnego przy pomocy obserwacji sztucznych satelitów.* *Przegląd Geodezyjny* Nr 9, 1960.
15. J. A. Griebenkow: *O wiekowych wozmuszczeniach w tieorii dwiżenija iskusstwiennych sputnikow Ziemi.* *Astronomiczeskij Żurnał.* 1959, XXXVI 6.
16. J. W. Batriakow i W. F. Proskurin: *O wozmuszczeniach orbit iskusstwiennych sputnikow, wyzywajemych soprotiwlieniem wozducha.* *Iskusstwiennyje Sputniki Ziemi.* Wypusk 3. 1959.
17. G. Hergensham: *Die Bahn der Satelliten 1958 d 2.* *Naturwissenschaften* 1958, Nr 18.

РЕЗЮМЕ

В первой части статьи говорится о общем значении позиционных наблюдений искусственных спутников Земли и производится обзор научных и практических применений этих наблюдений, в частности в области геодезии, картографии и практической астрономии. Рассматриваются там также относящиеся к теории орбиты искусственных спутников Земли — теоремы и формулы, которые будут применены для проведения практической темы представленной во второй части статьи.

Во второй части рассматривается числовой пример определения позиций — географических и расстояний от поверхности Земли — искусственного спутника Земли 1958 d 2 (спутника № 3) для определённых моментов по предварительном

обозначении недостающих элементов его орбиты и их изменений во времени — на основании визуальных наблюдений в периоде первая половина мая и вторая половина июня 1958 года.

RÉSUMÉ

Dans la première partie (część I) de l'article, après avoir discuté en termes généraux l'importance scientifique des observations de position de satellites artificiels de la Terre, on a fait une revue détaillée des applications scientifiques et des emplois pratiques des observations de position dans le domaine de géodésie, de cartographie et d'astronomie géodésique. On y a tenu aussi à donner un abrégé de la théorie en ce qui concerne l'orbite elliptique du satellite artificiel terrestre, en se bornant à la portée des théorèmes et des formules nécessaires pour la résolution du problème qu'on a réalisé dans la partie deuxième.

Deuxième partie de l'article (część II) comprend un exemple numérique de la détermination de positions géographiques (φ, λ) des points „sousatellites” et d'hauteurs (H) au dessus de la surface terrestre du Spoutnik 1958 δ 2 pour un certain nombre de moments données, après avoir calculé des éléments manquants de son orbite, en s'appuyant sur les observations astronomiques effectuées de 15 à 30 Mai 1958.