

Mgr inż. Janusz Zieliński
Katedra Astronomii Geodezyjnej
Politechniki Warszawskiej

Badanie pola grawitacyjnego Ziemi przy pomocy
obserwacji sztucznych satelitów

Skrót

Przedstawiona jest nowa teoria struktury pola grawitacyjnego Ziemi, wyprowadzona na podstawie zmian elementów orbity sztucznego satelity Vanguard I przez uczonych amerykańskich – pracowników NASA. Uwagi w sprawie wiarygodności otrzymanych wyników oraz niektóre wnioski wypływające z teorii.

Wiadomo, że elipsoida obrotowa jest jedynie przybliżeniem prawdziwego kształtu Ziemi, którego dokładnie nie znamy. Wyznaczenie wartości spłaszczenia elipsoidy ziemskiej nie załatwia zatem jeszcze problemu określenia kształtu Ziemi. Należy wyznaczyć funkcję, któraby opisywała z możliwie największą dokładnością powierzchnię możliwie najbardziej zbliżoną do prawdziwej powierzchni geoidy. Powierzchnię taką nazywamy quasigeoidą. Mając znaną funkcję opisującą potencjał dla danej przyjętej quasigeoidy możemy wyprowadzić wzory na zmiany elementów orbity sztucznego satelity. Przez porównanie faktycznie występujących zmian elementów orbity z wyprowadzonymi wzorami możemy wnioskować o słuszności przyjętej postaci quasigeoidy.

Ta metoda doprowadziła uczonych amerykańskich: J.O'Keefe'a, A.Eckels'a i R.K. Squires'a do sformułowania twierdzenia o istnieniu we wzorze na ziemski potencjał grawitacyjny wyrazu będącego funkcją harmoniczną kulistą trzeciego stopnia, co nadaje quasigeoidzie lekko gruszkowatą formę. Materiałem wyjściowym były obserwacje amerykańskiego sztucznego satelity Vanguard I /wg nomenklatury międzynarodowej 1958 Beta 2/. Wystrzelony z bazy rakietowej Cap Canaveral dn. 17 marca 1958 r. Vanguard wszedł na orbitę o nachyleniu do równika $i = 34^\circ$, odległości od powierzchni Ziemi

w perigeum $H_p = 650$ km, i mimośrodzie $e = 0,19$. Dzięki wysokiemu pułapowi wpływ oporu atmosfery na zmiany elementów orbity był stosunkowo mały. Zapewniało to długi okres "życia" satelity oraz dużą stabilność tych elementów orbity, które były perturbowane hamowaniem ośrodka, co z kolei pozwalało na śledzenie ujawniających się wyraźniej perturbacji spowodowanych niecentrobarycznością Ziemi. Opracowaniem obserwacji i obliczaniem elementów orbity zajmuje się ośrodek pod nazwą "Vanguard Computing Center". Obserwacje opracowywane są w ten sposób, że każda grupa obserwacji z okresu około 7 dni wyrównywana jest niezależnie od znalezienia wszystkich określających orbitę parametrów. Parametrami tymi są :

- M = anomalia średnia na daną epokę
- a = półosć duża
- e = mimośród elipsy aproksymującej orbitę
- i = nachylenie do płaszczyzny równika
- ω = argument perigeum
- Ω = rektascenzja węzła wstępującego

Przebieg zmian w czasie w/w elementów okazał się niezwykle interesujący. Oto pokazany na wykresie przebieg zmian wartości mimośrodu: Przedstawia on sinusoidę o okresie ok. 80 dni. Taki sam był okres zmiany argumentu perigeum ω o wartość 2π , czyli obiegu perigeum dookoła środka Ziemi. Identyczną periodyczność wykazywały i inne zmieniające się elementy. Maksyma i minima sinusoidy przypadały na czas, kiedy szerokość geograficzna perigeum była bliska swym granicznym wartościom po obu stronach równika. Nasunęło to wniosek, że pole grawitacyjne Ziemi jest niesymetryczne względem równika i to w stopniu znacznie większym niż to przypuszczano dotychczas.

Dla znalezienia formuły spisującej ziemski potencjał grawitacyjny^{x/}, która spełniałaby w odpowiedni sposób wypowiedziany wyżej warunek O'Keefe'a wyszedł z wzoru na rozwinięcie potencjału grawitacyjnego w przestrzeni zewnętrznej, podanego

x/ Pod pojęciem potencjału grawitacyjnego będziemy rozumieć jedynie potencjał wywołany newtonowskimi siłami przyciągania z pominięciem działania siły odśrodkowej wywołanej ruchem obrotowym Ziemi.

przez Jeffreysa /2/ :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} S_n(\phi, \lambda) \quad /1/$$

gdzie: r = odległość przyciąganego elementu od środka masy przyciągającej

ϕ = szerokość geocentryczna

λ = długość geograficzna

S_n = funkcja harmoniczna kulista stopnia n

A_n = współczynnik liczbowy określający ilościowo n -ty człon szeregu.

Funkcja harmoniczna kulista jest to funkcja spełniająca równanie Laplace'a :

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_n}{\partial z^2} = 0 \quad /2/$$

Wyraz zerowego stopnia przedstawia średnią wartość funkcji, dalsze zaś wyrazy przedstawiają odchylenia o charakterze harmonicznym od średniej wartości. Suma odchyleń określonych n -tym wyrazem szeregu po całej powierzchni kuli = 0. Jeżeli układ współrzędnych x, y, z zastąpimy układem ϕ, λ, r , otrzymamy

$$f_n(x, y, z) = r^n Y_n(\phi, \lambda)$$

Udowadnia się, że funkcja Y_n jest kombinacją liniową $/2n+1/$ szeregowych rozwiązań równania Laplace'a, typu:

$$a_n P_n; a_n P_n^S \cos s\lambda; b_n P_n^S \sin s\lambda.$$

Wyraz pierwszy z wyżej wymienionych zależy tylko od zmiennej ϕ , nazywany jest funkcją strefową i ma wartość stałą wzdłuż równoleżników, przyczem dla n wartości ϕ wartość $P_n = 0$. Wielomiany P_n nazywamy funkcjami lub wielomianami Legendre'a; przybierają one postać:

nos
prz
Zie
por
wsz
się
neg
noś

gdz

We
zał
kie
rzę

/3/
zei
cał
pre
Zie
try
Te

był

n	P_n
0	1
1	$\sin \phi$
2	$\frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2}$
3	$\frac{5}{2} \sin^3 \phi - \frac{3}{2} \sin \phi$
4	$\frac{1}{8} (35 \sin^4 \phi - 30 \sin^2 \phi + 3)$
o	
o	
o	

Wyraży następne będące funkcją również i długości λ noszą nazwę funkcji tesseralnych i sektorialnych, jednakże w przypadku naszego rozumowania nie będą one brane pod uwagę. Ziemia w stosunku do płaszczyzny orbity sztucznego satelity porusza się szybkim ruchem obrotowym dookoła swej osi, przeto wszystkie wpływy zależne od długości geograficznej całkują się w sposób naturalny i ujawniają w postaci średniej dla danego równoleżnika. Wobec tego we wzorze /1/ założono = obecność jedynie harmonik sferycznych:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} P_n(\phi) \quad /3/$$

gdzie P_n wielomiany Legendre'a.

We wzorze tym wyraz stopnia pierwszego będzie równy zeru przy założeniu, że środek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy. Założenie takie w przypadku Ziemi dla układu współrzędnych ϕ i λ jest dostatecznie bliskie prawdy, aby we wzorze /3/ wyraz stopnia pierwszego mógł być pominięty. Wyraz stopnia zerowego przedstawia średni potencjał Ziemi, tj. taki jak gdyby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku. Dalsze wyrazy reprezentują potencjał perturbacyjny, wynikający z niekulistości Ziemi, przy czym wyrazy stopni nieparzystych mówią o niesymetrycznym rozkładzie potencjału względem płaszczyzny równika. Te ostatnie z uwagi na traktowanie Ziemi jako figury równowagi były przyjmowane dotychczas za praktycznie równe zeru.

Ponieważ z powodu wzrastających potęg $\underline{x}$ w mianowniku dalsze wyrazy szeregu /3/ szybko dążą do zera, O'Keefe w swoim rozumowaniu ograniczył się do wyrazu stopnia piątego.

W oparciu o formułę /3/ wyprowadzone zostały wzory na zmiany elementów orbity w funkcji współczynników $A_{2,0}$, $A_{3,0}$, $A_{4,0}$, $A_{5,0}$. Wyrazy stopnia drugiego i czwartego powodowały zmiany wiekowe rektascenzji węzła wstępującego Ω oraz argumentu perigeum ω , zaś wyrazy stopnia trzeciego i piątego zmiany okresowe mimośrod $\underline{e}$ i dodatkowe zmiany okresowe dwóch poprzednich elementów, z okresem równym okresowi obiegu perigeum dookoła środka Ziemi.

Aby można porównywać wartości elementów obliczonych z obserwacji z tymi samymi wartościami wynikającymi z teorii pola grawitacyjnego, należało jeszcze oczyścić obserwacje od wszelkich innych wpływów, a przede wszystkim od wpływu hamującego działania atmosfery. Z uwagi na wysoki pułap Vanguarda wpływ ten był stosunkowo niewielki i dawał się opisać stosunkowo nieskomplikowaną funkcją. Do wyznaczenia tej funkcji posłużono się zaobserwowanymi zmianami wartości $\underline{e}$ = ruchu średniego, jako wielkości mało zależnej od struktury pola grawitacyjnego. Następnie uwzględniono wpływ tak znalezionej oporu atmosfery na wielkości $\underline{e}$, ω , Ω . Otrzymano w ten sposób wzory

$$\underline{e} + \Delta \underline{e} = \underline{e}_0 + C_e \sin \omega$$

$$\omega \pm \Delta \omega = \omega_0 + \omega_0 (t - t_0) + C_\omega \cos \omega \quad /4/$$

$$\Omega + \Delta \Omega = \Omega_0 + \Omega_0 (t - t_0) + C_\Omega \cos \omega$$

gdzie $\underline{e}$, ω , Ω - wartości obliczone z obserwacji

$\Delta \underline{e}$, $\Delta \omega$, $\Delta \Omega$ - wpływ oporu atmosfery

$\underline{e}_0$, ω_0 , Ω_0 - wartości na epokę początkową

$\omega_0 (t - t_0)$, $\Omega_0 (t - t_0)$ - zmiany wiekowe

$C_e \sin \omega$, $C_\omega \cos \omega$, $C_\Omega \cos \omega$ - zmiany okresowe.

Na podstawie zmian wiekowych wartości ω i Ω będących funkcją całonów rzędów parzystych wzoru /3/, obliczone - rozwiązując układ równań z dwoma niewiadomymi - współczynniki

$$A_{2,0} \text{ i } A_{4,0}$$

Wynoszą one:

$$A_{2,0} = -17,553 \pm 0,001 \text{ Mm}^5 \text{ ksek}^{-2} \quad x/$$

$$A_{4,0} = +1,12 \pm 0,04 \text{ Mm}^7 \text{ ksek}^{-2}$$

Odpowiada to wartości spłaszczenia Ziemi $\frac{1}{e} = 298,24$.

Do obliczenia $A_{3,0}$ i $A_{5,0}$ użyto zmian okresowych wartości a, ω i Ω . Otrzymano w ten sposób trzy równania z dwoma niewiadomymi, które po rozwiązaniu metodą najmniejszych kwadratów dały:

$$A_{3,0} = +0,25 \pm 0,03 \text{ Mm}^6 \text{ ksek}^{-2}$$

$$A_{5,0} = +0,2 \pm 0,3 \text{ Mm}^8 \text{ ksek}^{-2}$$

Ostatnia wartość, jak widać, jest mniejsza od swego średniego błędu, wobec czego autor obliczeń nie wprowadza jej do dalszego rozumowania.

Aby otrzymać pełny wzór na potencjał Ziemi w przestrzeni zewnętrznej, O'Keefe poszukuje jeszcze jego pierwszego wyrazu $A_{0,0} = k.M$, gdzie k = stała grawitacyjna, M = masa Ziemi. Obliczając go zupełnie inną metodą, z obserwacji ruchu Księżyca otrzymuje:

$$A_{0,0} = 398,618 \text{ Mm}^3 \text{ ksek}^{-2}$$

Tak więc ostateczny wzór na potencjał Ziemi wg. O'Keefe będzie miał postać

$$U = \frac{398,618}{r} - \frac{17,555}{r^3} P_2^2 + \frac{0,25}{r^4} P_3 + \frac{1,12}{r^5} P_4$$

w jednostkach $\text{Mm}^2 \text{ ksek}^{-2}$

Jak już powiedziano wyżej obecność we wzorze /9/ wyrazu trzeciego stopnia świadczy o niesymetryczności grawitacyjnego pola potencjalnego Ziemi względem płaszczyzny równika. Niesymetryczność ta powstaje przez nałożenie się funkcji /patrz wykres rys.2/:

$$v = k_2 = \frac{1}{2} (1x^2 - 1x) \quad \text{gdzie } x = \sin \phi$$

2/ $\text{mm} = \text{meganometr} = \text{m} \cdot 10^6$

$\text{ksek} = \text{kilosekunda} = \text{sek} \cdot 10^3$

na powierzchnię sferoidy reprezentowanej przez pozostałe człony wzoru /9/. Otrzymany wówczas powierzchnie ekwipotencjalne o zlekka gruszkowatym kształcie. Znak plus przy współczynniku $A_{3,0}$ wskazuje, że cieńszy koniec "gruszki" znajduje się na biegunie północnym, spłaszczony - na południowy. Taki też kształt będzie miała quasigeocida, której równanie - przy założeniu $U = U_0$ - będzie równanie /9/. Wartość zerowa funkcji P_3 przyjmuje na równiku i przy $\varphi \approx \pm 50^\circ$.

Podobnie jak potencjał przedstawić można w postaci szeregu przyspieszenie powierzchniowe:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,0} P_n(\varphi)$$

$g_{n,0}$ można obliczyć z wzoru podanego przez Jeffrey /2/ :

$$A_{n,0} = \frac{a^{n+2}}{n-1} g_{n,0}$$

gdzie a promień równikowy Ziemi, skąd:

$$g_{3,0} = 4,7 \pm 0,4 \text{ mgal}$$

stąd możemy obliczyć odstęp maksymalny

$$h_{3,0} \approx \frac{\Delta g}{0,309} \approx 15 \text{ m}$$

Wartość $g_{3,0}$ możemy uważać za anomalię grawimetryczną w miejscu, gdzie funkcja P_3 osiąga maksimum tzn. na biegunie względem figury opisanej wzorem /9/ bez wyrazu trzeciego rzędu. Figura taka spełniałaby warunki figury równowagi. Bez względu na wartość tej anomalii jest niewielka, należy pamiętać jednak, że rozkłada się ona zgodnie z przebiegiem funkcji P_3 - na dużym obszarze.

Dotychczas pole grawitacyjne Ziemi badane było, poza astronomiczną metodą obserwacji Księżyca, przy pomocy naziemnych pomiarów bezwzględnych i względnych. Całe wielkie obszary powierzchni Ziemi nie zostały jeszcze zbadane, zwłaszcza półkula południowa. Na podstawie dotychczas zebranych materiałów sformułowana została przez Heiskanena Vening-Mainesa tzw. podstawowa hipoteza geodezji o figurę Ziemi /1/. Według tej hipotezy kształt Ziemi jest bardzo

zbliżony do kształtu jaki przyjmie idealnie plastyczna masa pod działaniem siły przyciągania i siły odśrodkowej wywołanej obrotem dookoła osi, czyli tzw. figury równowagi. Odchylenia od tego kształtu wyrażone przez średnią anomalię grawitacyjną z pewnego obszaru pomnożoną przez powierzchnię tego obszaru nie powinny przekraczać wartości 30 mgal.Mm^2 . Tymczasem wartość otrzymana z formuły O'Keefe jest znacznie większa, wynosi bowiem dla każdego z obszarów biegunowych ok. 150 mgal.Mm^2 , a dla obszarów w średnich szerokościach jeszcze więcej. Świadczyłoby to o znacznie większej sztywności całej bryły Ziemi, lub jej wierzchnich warstw-płaszcza, niż to było przyjmowane dotychczas.

Wyjaśnienie zagadki powstania i utrzymywania się tych dość znacznych nierównomierności w rozmieszczeniu mas Ziemi należy pozostawić geofizykom. Nasuwa się jednak pewien wniosek, pozostający w związku z nieskrystalizowaną jeszcze ostatecznie teorią izostazji. Otóż w obszarach gdzie powierzchnia naszej "gruszki" znajduje się poniżej sferoidy mieści się ok. 60% wszystkich lądów. Wynika stąd, że w obszarach zajętych przez kontynenty zaznacza się znaczny niedobór masy w porównaniu z obszarami oceanów. Wiadomo, iż na skutek erozji pewne ilości masy stale są przenoszone z obszarów lądowych do morskich. Jeżeli skorupa ziemska jest dosyć sztywna, przemieszczenia te nie są kompensowane przemieszczeniami wewnętrznymi i z biegiem czasu stan równowagi izostatycznej, który mógł istnieć w jakimś początkowym okresie formowania się płaszcza, ulegałby zakłóceniu.

Mimo iż do odkrycia ogłoszonego przez O'Keefe i współpracowników, tak jak do każdej niesprawdzonej nowiny, należy podchodzić z naukową ostrożnością, wydaje się, że wyciągnięte przez nich wnioski zasługują na zaufanie. Po pierwsze: oparte są na bardzo dokładnych obserwacjach fotograficznych, wykonywanych przy pomocy doskonałej aparatury; po drugie: interpretacja zjawiska i podejście matematyczne jest bezbłędne i wydaje się być jedynie trafnym; po trzecie wreszcie wszystkie wyznaczone i obliczone wartości jak np. zmiana okresowa ω , zmiana okresowa ω , czy wreszcie sam współczynnik $A_{3,0}$ były znacznie większe od swoich błędów średnich, także nie ma mowy o działaniu jakichś czynników przypadkowych. Okres z

którego obserwacje były brane pod uwagę liczył ok. 300 dni, a więc materiał był obszerny i rozłożony w czasie. Niemniej do sprawdzenia słuszności twierdzenia O'Keefe konieczne są dalsze badania tak środkami astronomicznymi za pomocą sztucznych satelitów, jak i metodami grawimetrycznymi.

Wzór na potencjał podany przez O'Keefe nie nadaje się do praktycznego wykorzystania, np. do obliczenia g w dowolnym punkcie, ponieważ pomija wpływ funkcyjny długości geograficznej. Wartość U określona przez /9/ jest wartością średnią dla równoleżnika o danym ϕ . Ma jednak duże znaczenie teoretyczne, gdyż wskazuje na pewne zjawiska, których obecności się nie spodziewano.

L i t e r a t u r a

1. W.Heiskanen, F.Vening Meinesz /1958/ "The Earth and its Gravity Field"
 2. H.Jeffreys "The Earth" /1952/
 3. Cz.Kamela /1953/ "Geodezja dynamiczna"
 4. J.O'Keefe, A.Eckels, R.K.Squires "The Gravitational Field of the Earth"
- The Astronomical Journal 1959 64 Nr 1272.