

Janusz Zieliński
Katedra Astronomii Geodezyjnej
Politechniki Warszawskiej

NOWE METODY I WYNIKI BADANIA FIGURY ZIEMI

Streszczenie:

Artykuł przypomina w zarysach zasady wyznaczania figury Ziemi metodami: astronomiczno-geodezyjną i grawimetryczną, ze zwróceniem uwagi na słabe punkty teorii tych metod. Dalej omówione są rezultaty poszukiwań parametrów figury Ziemi metodą obserwacji sztucznych satelitów i przytoczone są wyniki liczbowe. Przedstawione są próby łącznego wyrównania danych otrzymanych trzema metodami oraz podane są związane z tym problemem koncepcje własne autora: wprowadzenie do metody geometrycznej i grawimetrycznej wyników otrzymanych metodą satelitarną oraz odmienny od przyjętego przez W. Kaulę sposób łącznego wyrównania. Wyprowadzone są wzory i wykonany rachunek dla zbadania wpływu obecności trzeciej harmoniki kulistej P_3 na wynik wyznaczenia spłaszczenia z pomiarów stopnia. Obliczono, że przy uwzględnieniu, tej poprawki, wartość spłaszczenia elipsoidy Krassowskiego byłaby bliska $\frac{1}{297}$.

Stosowane obecnie metody badania figury Ziemi dają do rąk współczesnym geodetom cały arsenał środków do wykonania tego zadania, środków którymi są zarówno osiągnięcia teorii, jak i techniki. I tak sposoby badania kształtu Ziemi mogą być zgrubsza podzielone na cztery grupy: metody geometryczne, grawimetryczne, astronomiczne z wykorzystaniem sztucznych satelitów i wykorzystujące naturalne zjawiska astronomiczne /wg terminologii niektórych autorów tzw. geodezja kosmiczna/. Do grupy pierwszej zaliczylibyśmy przede wszystkim triangulację i trilaterację uzupełnione oczywiście obserwacjami astronomicznymi i grawimetrycznymi, metody pomiaru stopnia, niwelację astronomiczną itp. W grupie metod grawimetrycznych mamy różne sposoby wykorzystania materiałów uzyskanych z wyznaczeń względnych i bezwzględnych siły ciężkości. Jeśli chodzi o wykorzystanie sztucznych satelitów - to obecnie mamy do czynienia ze stosowaną w różnych wariantach metodą wyznaczania parametrów geoidy ze zmian w ruchu orbitalnym satelity. Do ostatniej grupy należą takie metody jak wykorzystanie zaćmień Słońca i zakryć gwiazd, które naogół pozostają jeszcze w sferze eksperymentów. Podział ten, rzecz jasna, nie jest ani sztywny, ani ścisły; można wskazać szereg metod łączących w sobie cechy poszczególnych grup; poszukiwane są ponadto sposoby wykorzystania łącznego wyników otrzymanych poszczególnymi metodami.

Jednocześnie z rozwojem metod badania i ich teorii ewoluowało również pojęcie figury Ziemi. Jeśli dawniej starano się wyznaczyć promień kuli ziemskiej, a potem zadawano się wartością promienia równikowego i spłaszczenia elipsoidy, to wynikało to nie tylko ze skromności istniejących środków technicznych, ale także szczupłości zasobu pojęć, które zresztą mogły się rozwinąć dopiero po nagromadzeniu i przemyśleniu odpowiedniej ilości doświadczeń. Poszukiwana i wyznaczana dzisiaj powierzchnia geoidy jest o tyle bardziej skomplikowana od kuli, co obecne metody pomiaru stopnia od metody Eratostenesa. Należy zresztą powiedzieć przy tym, że tak często wysuwane jako główne zadanie wyznaczenia fizycznej powierzchni Ziemi dla celów praktycznych, jest obecnie już tylko pretekstem do badań o charakterze czysto teoretycznym. Do sporządzenia wszystkich map na świecie wystarczała obliczona 120 lat temu elipsoidalna Bessela, a aż nadto dobra była mająca już lat przeszło 50 elipsoidalna Hayforda. Tym większą zasługę należy przypisać uczonym geodetom, że wychodząc poza praktycyzm, prowadzą nadal uciążliwe i żmudne prace, których znaczenia nie sposób przewidzieć.

Aby tym lepiej rozpatrzyć się w sposobach proponowanych przez różne metody i móc porównać ich wyniki - przypomnijmy pokrótce zasady każdej z nich.

Metoda geometryczna

Pod tą ogólną nazwą rozumiemy będziemy wszystkie poczynania mające na celu wyznaczenie geoidy, związane z pomiarem elementów geometrycznych - kątów i długości - a więc także wyznaczenia astronomiczne.

Co należy rozumieć pod pojęciem "wyznaczenie geoidy"?

Ogólnie można na to odpowiedzieć następująco: geoida będzie wyznaczona, jeżeli potrafimy określić współrzędne dowolnego jej punktu w układzie związanym z innym dowolnym jej punktem, a także w układzie związanym z określonymi punktami rzeczywistej, fizycznej powierzchni Ziemi. Inaczej: geoida będzie określona, jeżeli potrafimy określić związki między dowolnymi jej punktami, a także między jej punktami i określonymi punktami fizycznej powierzchni Ziemi.

Oczywistym jest, że podobnie jak plan warstwiczny jakiegoś wycinka terenu przedstawia go zawsze z pewną dokładnością poziomą i pionową, podobnie nasze wyobrażenie geoidy nie będzie nigdy doskonale adekwatne z rzeczywistością. Dlatego każdorazowo, przy zagadnieniach mających związek z wyznaczeniem geoidy, warto zastanowić się - do jakiej granicy dokładności należy dążyć, jak dalece warto silić się na badanie detali. W wielu przypadkach dla celów teoretycznych cenniejszy jest obraz ogólny, mniej dokładny, co nie przeszkadza, że w innych właśnie szczegóły odgrywają zasadniczą rolę. Do prób uzyskania tego obrazu ogólnego, w pierwszym rzędzie należy zadanie wyznaczenia elipsoidy z pomiarów stopnia. Idea wyznaczenia rozmiarów Ziemi z pomiarów długości łuku południka jest tak stara jak geodezja. Rozwijana i uzupełniana była wraz z rozwojem pojęć geodezji, matematyki, fizyki, astronomii. Obecnie mimo, iż wiadomo o skomplikowanym charakterze powierzchni będącej geoidą, nie zaprzestano prób coraz lepszego i dokładniejszego wyznaczenia powierzchni znanej pod nazwą elipsoida ziemską. Chodzi o to, że elipsoida jest dobrą "osnową" do prowadzenia dalszych badań, "pomiaru szczegółów". Jeżeli tak będziemy rozumieć znaczenie elipsoidy przy badaniu figury Ziemi, jeśli będziemy ją uważali za powierzchnię nie tyle opisującą rzeczywisty kształt bryły ziemskiej, co za powierzchnię odniesienia, na której możemy opisywać dokładniej przebieg geoidy, to okaże się, że kwestia wymiarów elipsoidy nie jest najważniejsza. Jesteśmy w stanie mierzyć odstęp między fizyczną powierzchnią Ziemi a elipsoidą o dowolnym kształcie, czyli nawet przy przyjęciu pewnych konwencjonalnych, założonych wartości dla parametrów elipsoidy, możemy otrzymać poprawne pojęcie o rozpiętej na niej geoidzie. Odnosi się to zarówno do zagadnień praktycznych jak i teoretycznych. Czy wobec tego należy zaniechać dalszych prób wyznaczania elipsoidy? Z pewnością nie. Mimo, że w ciągu ostatnich kilku tylko lat ogłoszono sporo wyników prac nad tym problemem, mimo, że mamy mnogość elipsoid, nie mamy ciągle dostatecznie dobrego wyobrażenia o geoidzie, z tej prostej przyczyny, że wielkie obszary globu ziemskiego pozostają ciągle niepomierzone. Włączając do nowego obliczenia elipsoidy nowe wyniki pomiarów z terenów dotychczas nietkniętych, otrzymujemy nie tylko nowe wymiary obydwu półkuli, ale również nowe elementy orientacji, co jest bardzo ważną sprawą. Nawet znając poprawne wymiary elipsoidy, będziemy mieli trudności z wyznaczeniem geoidy przy błędnych elementach orientacji. Rozwiązaniem idealnym byłoby takie usytuowanie elipsoidy względem geoidy, aby ich środki ciężkości i osie obrotu pokrywały się ze sobą. Od spełnienia tego warunku jesteśmy jeszcze dosyć odlegli. I. Fischer [22] podaje ocenę dokładności pokrycia się dwóch centrów ± 200 m, co oczywiście jest zbyt wiele jak na ambicje współczesnej geodezji.

Zasada pomiaru stopnia polega jak wiadomo na tym, że metodami geodezyjnymi mierzymy odcinek łuku południka lub równoleżnika i porównujemy to z pomierzonymi astronomicznie różnicami szerokości bądź długości geograficznej punktów skrajnych łuku. Elementarne wzory metody są następujące:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{a(\varphi'_1 - \varphi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_1 + \varphi'_1) \right] e^2 - \dots \right\} \\ s_2 &= \frac{a(\varphi'_2 - \varphi_2)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_2 + \varphi'_2) \right] e^2 - \dots \right\} \\ s_1 &= \frac{a \Delta \lambda_1'' \cos \varphi_1}{\rho''} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi_1 + \dots \right) \\ s_2 &= \frac{a \Delta \lambda_2'' \cos \varphi_2}{\rho''} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi_2 + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} /1/ \\ /2/ \end{array}$$

gdzie e - mimośród elipsy południka, a - promień równika. Wzory /1/ odnoszą się do pomiaru południkowego i s_1, s_2 są długościami pomierzonych odcinków południka, $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2'$ szerokościami geograficznymi końców odcinków. Wzory /2/ odnoszą się do pomiarów równoleżnikowych, S_1, S_2 - długości łuków dwóch równoleżników, $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2$ różnice długości geograficznych końców odcinków. Z każdej z tych par możemy obliczyć niewiadome a i e^2 .

We wzorach tych tkwi pewne upraszczające założenie polegające na tym, że wielkość $(\varphi' - \varphi)$ uważana jest za dostatecznie małą, aby w tym przedziale funkcja $s(\varphi)$ miała charakter liniowy. Tak więc teoretycznie byłoby najkorzystniej mierzyć jaknajkrótsze odcinki s i odpowiednio małe różnice $(\varphi' - \varphi)$. /Niestety wzrastałby wówczas bardzo błąd względny pomiaru/. Ponieważ granica stosunku $\frac{\Delta s}{\Delta \varphi}$ jest odwrotnością krzywizny południka, możemy stwierdzić, że wyznaczenie elipsoidy z pomiarów stopnia polega na pomiarze krzywizny przekroju południkowego tej powierzchni. W takim samym stopniu jest to słuszne dla pomiarów równoleżnikowych z tym, że mamy tam do czynienia z przekrojem niecentralnym, równoleżnikowym.

Istotną przeszkodą w sensie teoretycznym i źródłem błędów w praktyce jest fakt, że mierząc elipsoidę znajdujemy się nie na niej, a na innej powierzchni, której nie znamy. I tak długość linii bazowych znana z pomiaru na geoidzie nie odpowiada długości tychże linii na elipsoidzie. Ponieważ odstęp geoidy od tej samej elipsoidy wahają się w granicach kilkudziesięciu metrów, mogą zachodzić wypadki, że błąd długości mierzonego łuku wyniesie 1:100000. Jeszcze poważniejszy jest problem pomiaru wielkości kątowych φ i λ . Lokalne odchylenia pionu dochodzą do kilkunastu sekund łuku, zaś grawimetryczne poprawki do pomiarów astronomicznych mają dokładność nie większą niż 1". W tym stanie rzeczy, przyjęta przy wyznaczeniach astro-geodezyjnych zasada

$$\sum \xi^2 + \eta^2 = \min \quad /3/$$

/ ξ - poprawione grawimetrycznie odchylenie pionu w południku, η - w pierwszym wertkale/ nie prowadzi do wyrównania wartości mierzonych, bo dokładność ich pomiaru jest znacznie wyższa, ale do wygładzenia nierówności fragmentu geoidy i znalezienia elipsoidy jako tako zgadzającej się z geoidą w mierzonym obszarze. ξ i η obserwowane na pewnym ograniczonym terenie nie rozkładają się przypadkowo. Na wartości te wpływa mocno rozkład anomalii grawimetrycznych w promieniu kilkuset km, a słabiej ale jeszcze wyraźnie w promieniu do kilku tysięcy km. Błędna znajomość rozkładu anomalii w tak oddalonych terenach powoduje błąd systematyczny w poprawkach $\Delta\xi$ i $\Delta\eta$ dla całego regionu objętego pomiarem.

Najślabszą wreszcie stroną pomiarów stopniowych jest ograniczenie ich do terenów kontynentalnych. Tymczasem z góry można się spodziewać innego przebiegu geoidy na obszarach oceanicznych. Sprawa ta przez długi czas była przedmiotem kontrowersji. Jeszcze przed końcem ubiegłego stulecia F.A. Słudski [24] twierdził, że geoida winna mieć przewyższenia nad elipsoidą na oceanach, a znajdować się pod nią na lądach. Hayford [10] przy obliczaniu swojej elipsoidy zastosował procedurę opartą na założeniu, że geoida przebiega ponad elipsoidą na lądach, zaś pod nią - na oceanach. Jeffreys [10] zaś doszedł do przekonania, że nie ma żadnej systematycznej różnicy w tym względzie. Wyniki otrzymane z obserwacji sztucznych satelitów, wskazują, że rację miał jednak Słudski. Rzecz prosta, że nie mając konkretnych wiadomości na ten temat, nie można było tego odpowiednio uwzględnić w obliczeniach.

Coraz wyższa dokładność kolejnych wyznaczeń pochodzi nie tylko z udoskonalania techniki i teorii pomiarów, ale w większym stopniu z obejmowania pomiarem coraz to większych terytoriów. Elipsoida Hayforda wyliczona była z pomiarów sieci pokrywającej kontynent Ameryki Północnej. Krassowski do swych obliczeń włączył triangulację amerykańską i europejską obok wykonanej w ZSRR, gdzie pokryta siecią była cała niemal europejska część kraju i zmierzony został gigantyczny łuk równoleżnikowy przez część azjatycką, od Uralu do Pacyfiku. Ostatni z podanych w tabeli wyników I. Fischer [5] pochodzi z wykorzystania zarówno wszystkich poprzednich pomiarów, jak i najnowszych: łuk transafrkański włączony do sieci europejskiej, łuk transamerykański od Alaski do południowych krańców Ameryki Południowej z dodatkowym przewiązaniem przez Brazylię od Oceanu Spokojnego do Atlantyku, łuk bliskowschodni pozwalający powiązać sieci triangulacyjne Indii i Birmy z siecią euro-

Tabela 1 Ważniejsze wyniki pomiarów elipsoidy

Autor	rok	a	α^{-1}
Bougner Maupertuis	1738	6 397 300 m	216,8
Delambre	1800	6 375 653	334,0
Everest	1830	6 377 276	300,8
Bessel	1841	6 377 397	299,15
Clarke	1880	6 378 249	293,5
Helmert	1907	6 378 200	298,3
Hayford	1910	6 378 388	297,0
Heiskanen	1926	6 378 397	/297,0/
Krassowski	1946	6 378 245	298,3
Jeffreys	1948	6 378 099	297,1
Ledersteger	1951	6 378 298	/297,0/
Hough	1956	6 378 260	/297,0/
Fischer	1961	6 378 157 6 378 155	298,1 /298,3/

Liczba α^{-1} ujęta w nawiasach oznacza, że została ona przyjęta z góry, a nie obliczona w tym wyznaczeniu.

pejską, sieć japońską łączącą się poprzez Koreę, Mandżurię z obszarami ZSRR, wreszcie wykorzystano nawiązania międzykontynentalne metodami trilateracji: Ameryka Północna - Europa poprzez Grenlandię i Ameryka Północna - Ameryka Południowa przez wyspy Indii Zachodnich.

Wykorzystanie pomiarów z tak dużych obszarów jeszcze bardziej niż na wymiary wpływa na dokładność orientacji wyliczonej elipsoidy, w sensie zbliżania się do elipsoidy ziemskiej, ze środkiem pokrywającym się ze środkiem masy Ziemi. Z tego punktu widzenia szczególnie ważnym jest właśnie powiązanie poszczególnych pomierzonych fragmentów Ziemi.

Niejako produktem ubocznym przy pomiarach wielkich łuków jest uzyskiwanie profilu geoidy metodą niwelacji astronomicznej. Ponieważ pokrycie siecią triangulacyjną całej powierzchni Ziemi jest sprawą przyszłości, a nie jest pewne czy jakieś nowe metody nie pozwolą zrezygnować z tego kosztownego i pracochłonnego sposobu zakładania osnowy, niwelacja astronomiczna nie jest drogą, którą dojdziemy do zupełnego poznania geoidy.

Metoda grawimetryczna

Pomiary siły ciężkości są gałęzią wiedzy znacznie młodszą od pomiarów geometrycznych. Jeżeli za wynalazcę ich uważać Galileusza, to narodziły się one prawie w 2000 lat po tym, kiedy Eratostenes wykonał swój pierwszy pomiar stopnia. Toteż nie można się dziwić, że teoria pomiarów grawimetrycznych ciągle nie jest zamknięta. Jesteśmy świadkami trwających jeszcze sporów teoretycznych; powstają też stale nowe koncepcje i pojęcia.

Zasadniczym mierzalnym elementem, jakim posługują się grawimetrzy, używanym zarówno przy rozwiązywaniu zadania poszukiwania figury Ziemi, orientowaniu sieci triangulacyjnych jak i poszukiwaniach geologicznych, jest anomalia grawimetryczna. Zdefiniowana jest ona

$$\Delta g = g_o - g_0$$

g_o - obserwowane
 g_0 - obliczone

Tu jednak zaczynają się pierwsze komplikacje. Mierzona na punkcie obserwacyjnym wartość przyspieszenia siły ciężkości nie nadaje się do bezpośredniego porównania z g_0 , które odpowiada zerowej wysokości nad poziomem morza. Kwestia właściwego wprowadzenia redukcji do pomierzonej wartości g jest ciągle przedmiotem kontrowersji. Różne autorytety mają tu różne zdania na ten temat: Jeffreys, Graaff Hunter, Hirvonen, są zwolennikami redukcji wolnopowietrznej, Heiskanen, Vening - Meinesz - uważają za słuszną redukcję izostatyczną, zaś ostatnio coraz więcej zwolenników zdobywa sobie inwersyjna redukcja Rudzkiego /Lam-

bert, Michajłow [7]. Wprowadzenie takiej czy innej redukcji pośrednio określa powierzchnię, na którą zredukowany będzie pomiar. g_0 odpowiada pewnej powierzchni wzorcowej /np. elipsoidzie/, a więc Δg będzie różnicą przyspieszeń właściwych powierzchni wzorcowej i powierzchnią określoną przez zastosowaną redukcję. Ta ostatnia nie zawsze będzie geoidą. Przyjęcie takiego czy innego sposobu redukcji odbija się bardzo istotnie na wynikach, zmieniając rozkład anomalii. Przyjęło się nawet ostatnio, że przy podawaniu wyników wyznaczeń elipsoidy z pomiarów stopnia podaje się je dwukrotnie; zależnie od rodzaju anomalii użytych do obliczenia poprawek do odchyleń pionu. Np. I. Fischer [1] podaje wyniki jednego z ostatnich pomiarów:

$$\alpha = \frac{1}{297} \quad a = 6\,378\,240 \pm 100 \text{ /wolnopowietrzna/}$$

$$a = 6\,378\,280 \pm 100 \text{ /izostatyczna/}$$

g_0 jest wartością obliczoną ze wzoru na wartość normalną przyspieszenia, który ma postać:

$$g_c = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \xi \sin^2 2\varphi) \quad /4/$$

γ_e - wartość przyspieszenia na równiku,

φ - szerokość geograficzna,

współczynniki β i ξ zależą od stałych fizycznych Ziemi, między innymi od spłaszczenia - α , wg Jeffreysa [10]:

$$\beta = \frac{5}{2} m - \alpha + \frac{15}{4} m^2 - \frac{17}{14} e m$$

$$\xi = \frac{1}{8} e^2 - \frac{5}{8} e m$$

$$m = m / M, \omega, a, \alpha /$$

Na wykorzystaniu tego związku opiera się teoria badania kształtu Ziemi - wyznaczając empirycznie przez wielokrotny pomiar w różnych punktach globu współczynniki β i ξ , określimy spłaszczenie α .

Tabela 2 Ważniejsze wyniki wyznaczenia spłaszczenia α metodą grawimetryczną:

	rok	α^{-1}
Helmert	1884	299.25
Iwanow	1889	297.2
Bowie	1907	297.4
Helmert	1915	296.7
Heiskanen	1924	297.4
Heiskanen	1938	298.2
Heiskanen	1945	297.8
Heiskanen	1957	297.4

Podobnie jak było z wynikami pomiarów stopnia, dokładność wyżej wymienionych wyników rosła wraz ze wzrostem obszarów objętych pomiarami. Metoda grawimetryczna posiada tę niezaprzeczalną wyższość nad pomiarami geometrycznymi, że jest stosowalna również na morzach i oceanach. Obecnie stosowane nowe typy grawimetrów, np. grawimetr Grafa, obok starszych typów jak aparat wahadłowy Vening-Meinesza, pozwalają na szybkie wykonywanie pomiarów na morzach w skali masowej. Stwarza to możliwość objęcia całej naszej planety jednolitymi pomiarami. W tej chwili jesteśmy jeszcze dość daleko od takiego ideału i narazie do najlepiej zbadanych należą te tereny, gdzie poszukiwana jest ropa naftowa.

Poza tą wymienioną przewagą, można się jeszcze w metodzie grawimetrycznej dopatrzeć drugiej: α wyznacza się tu niezależnie od rozmiarów elipsoidy, podczas gdy w metodzie geometrycznej jest ono związane funkcyjnie z a . Jeśli weźmiemy pod uwagę, że mierząc Δg z dokładnością 0,2 mgl w dwóch punktach o różnych szerokościach geograficznych, otrzy-

mamy α z dokładnością tego samego rzędu, co wykonując pomiar stopnia między tymi punktami z dokładnością do $\frac{1}{500\,000} \alpha$, dojdziemy do wniosku, że przewaga metody grawimetrycznej w zakresie wyznaczania kształtu geoidy jest znaczna.

Przejdźmy teraz do "pomiarów szczegółów" w zakresie badania figury Ziemi i możliwości stwarzanych tu przez grawimetrię.

Tutaj, jednym z zasadniczych plusów jest możliwość otrzymywania absolutnych wartości odstępów geoidy od elipsoidy i absolutnych odchyleń plomu. Elipsoida, względem której obliczamy te wartości, ma orientację absolutną - jej środek pokrywa się ze środkiem ciężkości Ziemi - nie znane są natomiast jej wymiary.

Istnieją dwa zasadnicze kierunki postępowania. Jeden z nich, to określenie odstępów geoidy od elipsoidy wzorem Stokes'a:

$$N = \int_0^S F(\psi) \Delta g ds$$

/5/

ψ - odległość kątowa rozpatrywanego punktu,

Δg - anomalia,

ds - element powierzchni,

S - powierzchnia całej Ziemi.

Z założeń i wyprowadzenia tego wzoru wynikają pewne jego cechy, na które trzeba zwrócić uwagę:

- 1^o jest on ważny przy założeniu, że wszystkie masy znajdują się wewnątrz geoidy. Aby spełnić ten warunek, należy odpowiednio przekształcić zarówno samą geoidę, jak i pomierzone anomalie.
- 2^o Wzór ten wymaga całkowania po powierzchni całej Ziemi, wiadomo zaś, że pomiary nie obejmują jeszcze całej powierzchni planety. Rezygnując z matematycznej ścisłości, w praktyce pomija się bardzo odległe obszary, niemniej rozważany punkt musi być otoczony obszarem grawimetrycznie zbadanym o promieniu rzędu tysięcy km.

Trudności teoretyczne napotymane przy używaniu wzoru Stokes'a, jak również kłopoty z wyborem najwłaściwszych redukcji, powodują poszukiwanie nowych koncepcji, rozwiązujących to samo zadanie. Można się spotkać z coraz to nowymi pojęciami, takimi jak co-geoid, terroïd, telluroïd, quasigeoid, model-Earth, geop, spherop, itp. Nie hamuje to jednak prac konkretnych nad wyznaczaniem przebiegu geoidy, odwrotnie, stale otrzymujemy tu coraz lepsze i ciekawsze wyniki.

O ile metoda Stokes'a jest chętniej stosowana przez uczonych - nazwijmy ich - par excellence geodetów, to geodeci o zacięciu astronomicznym skłaniają się raczej ku drugiemu ze wzmiankowanych wyżej kierunków. Chodzi tu o metodę rozwinięcia w szereg funkcji kulistych. Wyrażając znany rozkład anomalii wzorem szeregowym funkcji kulistych, możemy przy pomocy współczynników tego wzoru również opisać rozkład odstępów N_0 :

$$\begin{array}{ll} \text{jeśli} & \Delta g = \Delta g / Y_{1,k} / \\ \text{to} & N_0 = N_0 / Y_{1,k} / \end{array}$$

x/ - Podstawiając do /1/ $e^2 \approx 2\alpha$ i różniczkując będziemy mieli:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{a(\psi' - \psi)}{\psi''} \frac{3}{2} \sin 2\psi$$

$$\text{skąd } d\alpha = \frac{3}{2} \frac{\psi'' ds}{a(\psi' - \psi) \sin 2\psi}$$

Biorąc zaś /4/ dla dwóch wartości i tworząc różnicę otrzymamy:

$$\Delta g = \gamma e \beta (\sin^2 \psi' - \sin^2 \psi) = \gamma e \beta \cdot \sin 2\psi \sin(\psi' - \psi)$$

$$d\alpha = d\beta = \frac{d\Delta g}{\gamma e \sin 2\psi \sin(\psi' - \psi)}$$

jeśli

$$\text{to } \frac{\psi'' ds}{a(\psi' - \psi)} = \frac{1}{500\,000} \quad \psi \approx 45^\circ \quad \psi' - \psi \approx 10^\circ$$

$$d\alpha = \frac{1}{750\,000} = 1,3 \cdot 10^{-6}$$

Metoda ta pozostawała dotychczas raczej w cieniu metody Stokes'a, ponieważ bardziej istotną jest tu znajomość rozkładu anomalii na całej kuli ziemskiej. Jak ryzykownym jest ekstrapolowanie danych z terenów zmierzonych na niepomierzone, wskazuje przykład geoidy Żongolowicza. Na podstawie znanych anomalii wyznaczył on współczynniki rozwinięcia funkcji kulistych do ósmego stopnia. Niestety /7/ wykonane później pomiary nie zgadzały się z ekstrapolowanymi w ten sposób danymi z innych terenów. Obecnie metoda rozwinięcia w szeregu funkcji kulistych przechodzi okres swojej świetności. Wynika to z faktu, że jest ona dogodna przy badaniach metodami satelitarnymi - współczynniki tego szeregu opisują również funkcję potencjalną w przestrzeni zewnętrznej. W ten sposób od zbadanego obserwacjami satelitów pola potencjału mamy możliwość przejść do anomalii grawitacyjnych i odstępów geoidy od elipsoidy. Jest ona także dogodna przy opracowaniach łączących wyniki metod - grawimetrycznej, geometrycznej i satelitarnej.

Z ciekawszych prac nad badaniem geoidy wymienić można obok wspomnianego już wyznaczenia Żongolowicza - prace Hirvonen, Tanni'ego i Heiskanena. Pod kierunkiem tego ostatniego został niedawno /1961/ obliczony na podstawie najnowszych pomiarów grawimetrycznych tzw. "Columbus geoid". Zastosowana została tu metoda Stokes'a, ale z tego samego materiału Uotila znalazł współczynniki ośmiu kolejnych wyrazów rozwinięcia wg funkcji sferycznych zonalnych. Okazało się, że wyraz trzeciego stopnia ma wartość zbliżoną do podanej przez O'Keefe, wyznaczonej z obserwacji sztucznych satelitów. [6]

M e t o d a s a t e l i t a r n a

Ta najmłodsza z metod, powstała dopiero trzy lata temu, zrobiła już dużą karierę. Co najmniej kilka ośrodków i kilkanaście wybitnych autorytetów zachowują ten temat w centrum uwagi.

Dotychczas wszystkie zastosowania sztucznych satelitów w badaniu figury Ziemi opierały się na wykorzystaniu praw dynamiki, rządzących polem grawitacyjnym Ziemi. Dlatego niektórzy autorzy stosują tu termin: grawimetria astronomiczna. Istota tej metody polega na wyrażaniu perturbacji keplerowskiego ruchu satelitów, przez funkcje parametrów charakteryzujących ziemskie pole grawitacyjne. Naturalnie, mimo że perturbacjom podlegają wszystkie elementy orbity, nie wszystkie są równie dogodne do wyznaczania z nich poszukiwanych parametrów. Najważniejszą i najchętniej braną pod uwagę - zwłaszcza przy wyznaczeniu spłaszczenia Ziemi - jest zmiana rektascenzji węzła wstępującego. W niektórych wypadkach jednak również lub nawet bardziej korzystnie jest brać pod uwagę inne zmiany: argumentu perigeum, mimośrodu, nachylenia. I tak przy opracowywaniu obserwacji satelity Vanguard I O'Keefe [22] wykorzystał do obliczenia harmonik drugiej i czwartej zmiany Ω i ω , a trzeciej i piątej - e , i , Ω , ω .

Teoria ruchu satelity poruszającego się w pobliżu planety, pobudzona do życia faktem stworzenia sztucznych ciał niebieskich, rozwija się z impetem eksplozji. Mówi o tym wymownie ilość publikacji: w bibliografii prowadzonej w Biuletynie Polskich Obserwacji Sztucznych Satelitów w sześciu kolejnych numerach odnotowano 273 publikacje na temat zagadnień orbitalnych SSZ, z tego 71 ściśle związanych z geodezją. W tej sytuacji próba jakiejś systematyzacji w tej dziedzinie podjęta przez jedną osobę skazana jest na niepowodzenie.

Nie będziemy zatrzymywali się przy ogólnych podstawach zagadnienia, są one wyłożone w przystępny sposób np. w artykule W. Opalskiego "Teoretyczne podstawy wykorzystania orbit sztucznych satelitów do badania figury Ziemi" [23]. Zwróćmy natomiast uwagę na plusy i minusy tej metody w porównaniu z omówionymi poprzednio.

W metodzie grawimetrycznej wykonany pomiar odnosi się zawsze do jakiegoś szczególnego punktu. Dopiero z tych punktowych wyników, stosując interpolację, tworzymy sobie ogólny obraz powierzchniowy, możemy otrzymać np. mapę anomalii grawimetrycznych dla danego obszaru.

$$x/\text{d.o.} \quad \text{jeśli } d\Delta g = 0,2 \text{ mgl} \quad \sin(\varphi' - \varphi) \approx \frac{1}{5}$$

$$d\alpha = d\beta = \frac{1}{978000} \approx 1,0 \times 10^{-6}$$

W metodzie satelitarnej mierzymy - w sposób pośredni - pole grawitacyjne o a l e j Ziemi. Każde zagięcie terenu, każdy kamień, wpływa swą obecnością na kształt orbity satelity. Znika więc automatycznie problem terenów niepomierzonych - tak istotny w poprzednich metodach. Prowadzi to do ważnych wniosków. Wzór na wartość normalną przyspieszenia siły ciężkości wyprowadzony jest dla elipsoidy. Jego współczynniki β i ξ , jak również wartość γ_e wyznaczone są empirycznie z wielu obserwacji w różnych miejscach. Jeżeli jednak te obserwacje nie są rozmieszczone jednolicie na powierzchni całej Ziemi, zaś geoida w sposób systematyczny odbiega od elipsoidy, otrzymamy wartości β , ξ i γ_e obciążone błędami systematycznymi, właściwe - podobnie jak było w przypadku pomiarów geometrycznych - elipsoidzie najlepiej przystającej do mierzonych obszarów. Nie pozwolą się wówczas wykryć anomalie o niewielkiej wartości, a dużej powierzchni, tzn. nie pozwolą się wykryć tak długo, jak długo nie zostanie objęty pomiarami dużo większy obszar, gdzie wystąpią nadmierne anomalie o znaku przeciwnym. Wykorzystanie wyników obserwacji sztucznych satelitów pozwoli na uniknięcie tego niebezpieczeństwa. Należy poprawić wzór na przyspieszenie normalne, wstawiając obliczone metodą satelitarną spłaszczenie α , zaś z wyrównania pomiarów grawimetrycznych obliczyć jedynie γ_e .

Struktura pola grawitacyjnego Ziemi jest równie skomplikowana jak kształt geoidy, i możemy je opisać wzorem, np. rozwinięciem w szereg funkcji kulistych:

$$U = \sum \frac{A_{nk} P_{nk}}{r^{n+1}} (\phi, \lambda) \quad /6/$$

Wykonany w metodzie satelitarnej pomiar to wyznaczenie zmiany pewnego elementu orbity, która to zmiana jest funkcją całego pola grawitacyjnego, a więc wszystkich wyrazów szeregu. Z pomiaru tego stosunkowo łatwo jest wyznaczyć bliskie wyrazy, które mocno odbijają się na perturbacjach. Wyznaczenie dalszych wyrazów uzależnione jest od spełnienia specjalnych warunków orbitalnych, takich które w równaniach wiążących zmiany elementów orbity ze współczynnikami wzoru na potencjał, pozwolą wyrugować jedne a uwypuklić inne wyrazy. Szczególnie jest to ważne przy badaniu wzoru na U w funkcji λ , do czego niezbędne będzie zastosowanie orbit rezonansowych. Oczekuje się, że stosując orbitę rezonansową będzie można wyliczać współczynniki funkcji tesseralnych i sektorialnych tego samego rzędu co zonalnych.

"Zdolność rozdzielcza" tej metody jest uwarunkowana ponadto dwoma czynnikami: dokładnością obserwacji i odpowiednim wyrugowaniem perturbacji spowodowanych innymi przyczynami. Wykorzystane do celów geodezyjnych satelity były zazwyczaj obserwowane metodą fotograficzną, lub radiową z wykorzystaniem efektu Dopplera. Dokładność formalna obserwacji fotograficznych kamerami Baker Nunn jest wysoka: 2" w kącie i 0,001 w czasie. Trzeba jednak pamiętać, że obserwacje rozłożone są w przestrzeni i czasie nieregularnie, nie każde okążenie jest obserwowane, niektóre części orbity są w ogóle nie obserwowane. Poza tym upraszcza się rzeczywistość używając do obliczeń orbity oskulacyjnej, która - mimo iż w dalszym ciągu rozważań wprowadza się zmiany elementów w czasie - jest keplerowską. Rozpatruje się zmianę mimośrodów - mimo że ruch nie odbywa się po elipsie, rozpatruje się zmianę nachylenia i orientacji płaszczyzny orbity, mimo iż satelita nie porusza się w płaszczyźnie. Uproszczenia te - niegroźne wtedy, gdy mamy bogaty i równomierny materiał obserwacyjny - odbijają się ujemnie przy skąpej ilości i niekorzystnym rozłożeniu obserwacji. Dalej, już przy obliczaniu niewiadomych współczynników do wyrazów wzoru na potencjał, używamy jako znanych wielkości niektórych elementów orbity: mimośrodu, półosi, nachylenia i ruchu średniego. Np. wg O'Keefe'a

$$\Delta i_3 = -\frac{3}{2} \frac{A_{30} e \cos i}{n a^6 n'} \left[1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right] \sin \omega$$

Δi_3 - wpływ trzeciej harmoniki na nachylenie orbity
 i - nachylenie orbity
 A_{30} - współczynnik trzeciej harmoniki
 e - mimośród
 a - półos duża

n - ruch średni
 n' - ruch perigeum
 ω - argument perigeum

Pisząc to w postaci

$$\Delta i_3 = \frac{A_{30}}{n} \cdot Q$$

i obliczając pochodną A_{30} względem n mamy

$$\Delta i_3 = Q \frac{\partial A_{30}}{\partial n}$$

Przechodząc następnie do błędów względnych, otrzymujemy:

$$\frac{\Delta A_{30}}{A_{30}} = \frac{\Delta n}{n}$$

Tak więc poza wymaganą dokładnością wyznaczania zmian elementów orbity /w tym wypadku Δi_3 /, konieczna jest również dokładna znajomość bezwzględnych wielkości tych elementów. W praktyce mimo wspomnianych wyżej trudności, osiąga się wysoki stopień dokładności: Kozai [18] podaje elementy orbity satelity 1961 o 2 /Injun/: $n = 13,86862 \pm 0,00002$ obr/d; $e = 0,008105 \pm 0,000012$; $i = 66^\circ 81'46'' \pm 0,0009$. O'Keefe [22] używa do obliczeń $\Delta \Omega /1'$ z dokł. 10^{-5} , $\Delta \omega /1'$ z dokł. 3×10^{-4} , co przy obliczeniu spłaszczenia α pozwala na osiągnięcie dokładności rzędu 1 : 20000 /jedność na drugim miejscu po przecinku w mianowniku/.

Uwzględnienie wpływu innych czynników perturbujących ruch keplerowski satelity, wymaga rzecz prosta znajomości tych czynników. Stosunkowo prosto np. można wprowadzić poprawki za przyciąganie Słońca i Księżyca. Najwięcej kłopotu sprawia opór atmosfery i tu głównie tkwi przyczyna rozbieżności wyników otrzymanych przez różnych autorów. Jest to czynnik groźny głównie z powodu swej zmienności, a nawet rzecz można "niematematyczności". Albowiem nawet najwyższe warstwy atmosfery nie są nieruchome, występują tam prądy poziome, pionowe, a także zmiany gęstości, spowodowane zmianami pór roku, doby i innymi niezbadanymi przyczynami. W takiej sytuacji najzręczniejszym wydaje się wyznaczanie wpływu oporu atmosfery jednocześnie z parametrami pola grawitacyjnego. Metodę taką stosuje O'Keefe [22], używając do wyśledzenia wpływu oporu atmosfery zmian pól orbity a , mało czulej na czynniki grawitacyjne. Pozostaje sprawą otwartą, czy dokładność w ten sposób wykonanego rugowania jest dostateczna. Odbija się tu bowiem mocno nieregularność rozkładu obserwacji w czasie i przestrzeni.

Różni autorzy stosują różne symbole dla opisu ziemskiego potencjału grawitacyjnego. Podana niżej tabela zawiera współczynniki wzoru

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right] \quad /7/$$

Pozostają one z Jeffreysowskimi współczynnikami J i D w związku:

$$J = \frac{3}{2} J_2 \quad D = -\frac{35}{8} J_4$$

z używanymi przez O'Keefe'a:

$$A_{no} = -\frac{fM}{a^n} J_n$$

zaś ze stosowanymi przez Żongolowioza:

$$c_{no} = -J_n$$

Spłaszczenie α oblicza się z wzoru [16]:

$$\alpha = \frac{1}{2} (3J_2 + m) \left(1 + \frac{3}{4} J_2 + \frac{3}{28} m \right) + 0(J_2^3) \quad /8/$$

Powyższe wyniki uderzają swoją zgodnością, zwłaszcza w kolumnie J_2 i odpowiadającej jej kolumnie α^{-1} . Na podstawie tych danych można stwierdzić zupełnie pewnie, że α^{-1} zawiera się między 298,2 a 298,3. Przyjęcie takiej czy innej liczby w tym przedziale jest kwestią umowy, bo dokładność pierwszego miejsca po przecinku w mianowniku spłaszczenia odpowiada dokładności ok. 6,5 m w różnicy $a-b$. Również wartość J_3 możemy uznać za ustaloną: jest ona bliska $-2,5 \times 10^{-6}$. W kolumnach J_4 i J_5 znajdujemy jednak rozbieżności większe niż kazałyby spodziewać się wewnętrzne dokładności poszczególnych wyników podane przez autorów. To zmusza do odniesienia się z rezerwą także do ostatnich wyników podanych przez Kozai [18], mimo że pochodzą one z bardzo obszernego materiału, bo z obserwacji aż 31 satelitów.

- 34 -

Autor	Satelita	J ₂	J ₃	J ₄	J ₅	J ₆	J ₇	J ₈	α ⁻¹
Rok 1958									
Buchar	Sputnik 2	+1085.2	-	-2.4	-	-	-	-	297,90
Merson									
King-Hele	Sputnik 2	+1084.0	-	-2.4	-	-	-	-	298.1
Jacobia	Sputnik 2								
Vanguard 1		+1082.7	-	-2.1	-	-	-	-	298.28
Rok 1959									
Merson	Sputnik 2								
King-Hele	Vanguard 1	+1083.3	-	-1.0	-	-	-	-	298.2
Merson	Sputnik 2								
King-Hele	Vanguard 1								
Merson	Sputnik 2	+1083.0	-	-1.3	-	-0.1	-	-	298.2
King-Hele	Vanguard 1	/0.2/		/0.2/		/1.5/			
Lecar	Explorer 4								
Squires	Vanguard 1	+1082.2	-	-2.4	-	-	-	-	298.32
Eckels									
O'Keefe	Vanguard 1	+1082.5	-2.4	-1.7	-0.1	-	-	-	298.26
Eckels		/0.1/	/0.3/	/0.1/	/0.1/				
Squires									
Kozai	Vanguard 1	+1082.1	-2.2	-0.9	-	-	-	-	298.34
			/0.1/						
Rok 1960									
King-Hele	Sputnik 2								
Vanguard 1		+1082.79	-	-1.4	-	-0.9	-	-	298.24
Explorer 7		/0.15/		/0.2/		/0.8/			
Żongołowicz	Sputnik 2								
Sputnik 3		+1083.3	-2.	-4.1	-	-	-	-	298.17
Sputnik 3R		/0.7/	/3/	/0.7/					
Żongołowicz	Sputnik 3								
Sputnik 3R		+1083.2	-1.8	-4.2	-	-	-	-	298.18
Rok 1961									
Żongołowicz	Sputnik 3	+1082.5	-0.9	-3.4	-	-	-	-	298.26
Kozai	Explorer 7								
Vanguard 1		+1082.21	-2.29	-2.1	-0.23	-	-	-	298.31
Vanguard 3		/0.04/	/0.02/	/0.1/	/0.02/				
Michielsen	Transit 1B/R								
Vanguard 1		+1082.7	-2.5	-1.7	+0.3	+0.7	-0.6	+0.1	298.25
Sputnik 4									
Newton	Transit 2A								
Hopfield	Vanguard 1								
Kline	Transit 1B	-	-2.36	-	-0.19	-	-0.28	-	
			/0.14/		/0.10/		/0.11/		
Smith	Sputnik 3								
Transit 1B		+1083.15	-	-1.4	-	-0.7	-	-	298.19
Tiros 1		/0.2/		/0.3/		/0.6/			
Vanguard 2									
Rok 1962									
Shelkey		+1082.61	-	-1.52	-	-0.73	-	-	298.26
		/0.05/		/0.08/		/0.10/			
Kozai	31 satelitów	+1082.36	-2.57	-2.14	-0.06	+0.15	-0.47	-0.31	298.29
		/0.06/	/0.01/	/0.08/	/0.02/	/0.12/	/0.02/	/0.02/	
					J ₉ = +0.11	/0.02/			

Wyliszenie samych harmonik zonalnych tak wysokiego stopnia ma charakter nieco spekulatywny, gdyż wiadomo, że pole grawitacyjne zmienia się w funkcji tak φ jak i λ . Tych ostatnich wyznaczeń dotychczas było nie wiele, a te które miały miejsce, spełniły raczej rolę zbadania metody, nie zaś pomiaru pola grawitacyjnego. Wszystkie trzy podane w tabeli 4 wyniki ograniczone są do jednego tylko elementu: harmoniki tesserakalnej drugiego stopnia, co jest jednoznaczne z wyznaczeniem eliptyczności równika. Zdaniem autora, istotnego postępu spodziewać się tu można dopiero po wprowadzeniu orbity rezonansowej.

Tabela 4 Wyniki badania eliptyczności równika metodą satelitarną

Autor	rok		$\beta \times 10^5$	$\lambda_x (^\circ)$	$\alpha - \alpha'$
Izsak	1961	Vanguard 2	3,2	-33,2	205 m
		Vanguard 3	$\pm 0,3$	$\pm 0,5$	
Kaula	1961	Vanguard 1	1,1	-36	70 m
			$\pm 0,5$	± 16	
Newton	1961	Transit 4A	2,4	-11	219 m
			$\pm 0,5$	± 6	

β - spłaszczenie elipsy równikowej
 λ_x - długość geograficzna kierunku dłuższej osi
 $\alpha - \alpha'$ - różnica półosi

Porównanie i kombinowanie wyników różnych metod

Reasumując w krótkich słowach poprzednie rozważania możemy stwierdzić:

- Metoda geometryczna pozwala na określenie rozmiarów i ogólnego kształtu Ziemi, jej stosowność jest jednak ograniczona do terenów lądowych. Metoda niwelacji astronomicznej, z uwagi na trudne i kosztowne pomiary, nie obiecuje w krótkim czasie zbadania przebiegu geoidy na wszystkich kontynentach. Poważne trudności związane są z właściwą orientacją każdego niezależnego układu i z powiązaniem różnych układów.
- Metoda grawimetryczna daje możliwość dobrego rozeznania zarówno co do ogólnego, jak i szczegółowego kształtu geoidy, nie umożliwia jednak określenia jej rozmiarów. Ścisłe jej stosowanie wymaga jednak wykonania pomiarów na całej powierzchni globu, od czego jesteśmy jeszcze dosyć odlegli. Ponadto nierozstrzygnięte są jeszcze pewne zagadnienia z teorii tej metody.
- Metoda satelitarna pozwala na dokładne wyznaczenie ogólnej postaci figury Ziemi - bez jej wymiarów. Każdorazowe wyznaczenie tej postaci - nawet z obserwacji jednego satelity - dokonane jest z pomiaru odnoszącego się do całej Ziemi. Przy zastosowaniu satelitów służących specjalnie celowi badania figury Ziemi, będzie można znacznie zmniejszyć stopień ogólności figury podlegającej wyznaczeniu. Niemniej, szczegółowe badania przebiegu geoidy są dla tej metody niedostępne.

W tej sytuacji łączenie i uzupełnianie się poszczególnych metod jest logiczną koniecznością. Przykładem tego np. wprowadzenie grawimetrycznych poprawek na odchylenie pionu do pomiarów triangulacyjnych. Jest to rodzaj jednostronnego świadectwa jednej metody na rzecz udoskonalenia drugiej. Podobnego rodzaju korzyści wyciągnąć można z pojawienia się metody satelitarnej.

Jak wiadomo w grawimetrii poważnym problemem jest ocena wartości anomalii na terenach niepomierzonych. Znajomość postaci powierzchni będącej zgeneralizowaną geoidą - nazywamy ją quasigeoidą - pozwala na znalezienie tych wartości, w sposób przybliżony wprowadzić, lecz znacznie dokładniejszy od dotychczasowych. Przedstawmy przyspieszenie grawitacyjne wzorem [23]:

$$g = g_0 \left[a_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (a_{ns} \cos s\lambda + b_{ns} \sin s\lambda) P_{ns}(\sin \phi) \right] \quad /9/$$

i założymy, że kilka pierwszych współczynników a_{ns} i $b_{ns} / n \leq n_1$, $s \leq s_1 = n_1 /$ znamy z obserwacji sztucznych satelitów. Wobec tego wstawiając do /9/ znane a_{ns} b_{ns} jako stałe