

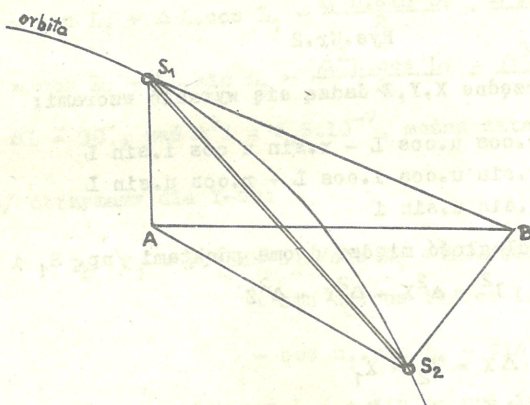
Janusz B. Zieliński

Katedra Astronomii Geodezyjnej
Politechniki Warszawskiej

ZASADA OBLICZENIA TRIANGULACJI PRZESTRZENNEJ
WYKONANEJ ZA POMOCĄ OBSERWACJI SYNCHRONICZNYCH NA PODSTAWIE CZĘŚCIOWEJ
ZNAJOMOŚCI ELEMENTÓW ORBITY

1. Ogólna charakterystyka metody

Jeżeli z dwóch punktów A i B, położonych na powierzchni Ziemi, zaobserwujemy satelitę w dwóch położeniach S_1 i S_2 /rys.1/ odpowiadających momentom T_1 i T_2 otrzymamy kierunki linii AS_1 , AS_2 , BS_1 , BS_2 w układzie współrzędnych astronomicznych α i δ , albo w układzie przestrzennym XYZ takim, którego oś Z pokrywa się z osią obrotu Ziemi, a płaszczyzna XY z płaszczyzną równika. Jeżeli na podstawie znajomości elementów orbity obliczymy długość odcinka prostej S_1S_2 , będziemy mogli łatwo rozwiązać czworościan ABS_1S_2 i obliczyć długość i kierunek krawędzi AB. Przyjmując dowolnie współrzędne początkowe punktu A będziemy mogli obliczyć współrzędne punktu B, a dalej w ten sam sposób współrzędne wszystkich punktów sieci.

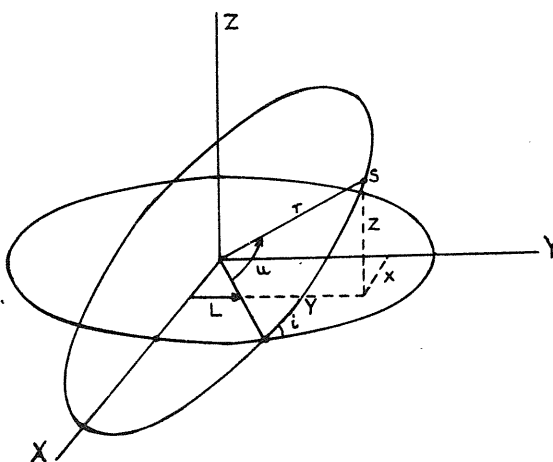


Rys.Nr.1

Jeżeli do wyznaczenia orbity zastosujemy metodę eliminującą wpływ błędów współrzędnych punktów obserwacyjnych na wyznaczenie wielkiej półosi orbity, wyrównywana sieć - poza absolutną orientacją - charakteryzować się będzie jednolitą skalą, niezależną od jakiegokolwiek pomiarów długościowych wykonanych na powierzchni Ziemi. Sieć taka będzie zatem uwolniona od błędów pomiaru baz, błędów redukcji baz na powierzchnię elipsoidy odniesienia, błędów wynikających z przenoszenia długości z boków mierzonych na niemierzone i oczywiście także błędów, jakimi obciążona jest klasyczna metoda triangulacji na skutek związku między pomiarem kąta i kierunkiem linii pionu w miejscu pomiaru. Skala takiej sieci będzie zależna tylko od stałych geofizycznych charakteryzujących ziemskie pole grawitacyjne.

Dokładność niniejszej metody ograniczona jest dwoma czynnikami: dokładnością z jaką znane są stałe ziemskiego pola grawitacyjnego i dokładnością obserwacji. W chwili obecnej przyjąć można, że górna granica dokładności rejestracji czasu wynosi $\pm 0,002$ sek; oznacza to ok. ± 15 m dokładność zaobserwowania satelity w przestrzeni. Taka zatem byłaby dokładność do jakiej należałoby dążyć przy obliczaniu odcinka bazowego S_1S_2 na podstawie znajomości elementów orbity. Program obserwacji synchronicznych satelitów Echo I i Echo II przewidywał wykonywanie obserwacji w odstępach dwuminutowych, przy przyjęciu podobnych założeń i dla satelitów o podobnych orbitach długość odcinka bazowego S_1S_2 będzie ok. 800 km. Otrzymalibyśmy zatem dokładność pojedynczego wyznaczenia długości boku sieci rzędu $2 \cdot 10^{-5}$ /pomijając wpływ błędów pomiarów kierunków, który będzie we wszystkich metodach triangulacji satelitarnej kształtował się podobnie/.

2. O b l i c z e n i e d ł u g o ś c i o d c i n k a b a z o w e g o



Rys.Nr.2

Jak wynika z rys.2 współrzędne X,Y,Z dadzą się wyrazić wzorami:

$$\begin{aligned} X &= r \cdot \cos u \cdot \cos L - r \cdot \sin u \cdot \cos i \cdot \sin L \\ Y &= r \cdot \sin u \cdot \cos i \cdot \cos L + r \cdot \cos u \cdot \sin L \\ Z &= r \cdot \sin u \cdot \sin i \end{aligned} \quad /1/$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć odległość między dwoma punktami /np. S_1 i S_2 / to:

$$l^2 = \Delta^2 X + \Delta^2 Y + \Delta^2 Z \quad /2/$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 \end{aligned} \quad /3/$$

Zakładamy obecnie:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_2 - r_1; & r &= \frac{r_1 + r_2}{2}; & r_1 &= r - \frac{\Delta r}{2}; & r_2 &= r + \frac{\Delta r}{2} & /4/ \\ \Delta u &= u_2 - u_1; & u &= \frac{u_1 + u_2}{2} & /4'/ \\ \Delta L &= L_2 - L_1 & /4''/ \\ i_1 &= i_2 & /4'''/ \end{aligned}$$

Będzie zatem:

$$X_1 = /r - \frac{\Delta r}{2} / \cdot \cos u_1 \cdot \cos L_1 - \sin u_1 \cdot \sin L_1 \cdot \cos i / \quad /5/$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= /r - \frac{\Delta r}{2} / \cdot \cos u_1 \cdot \sin L_1 + \sin u_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos i / & /5/ \\ Z_1 &= /r - \frac{\Delta r}{2} / \cdot \sin u_1 \cdot \sin i \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} X_2 &= /r + \frac{\Delta r}{2} / \cdot \cos u_2 \cdot \cos L_2 - \sin u_2 \cdot \sin L_2 \cdot \cos i / \\ Y_2 &= /r + \frac{\Delta r}{2} / \cdot \cos u_2 \cdot \cos L_2 - \sin u_2 \cdot \sin L_2 \cdot \cos i / & /5'/ \\ Z_2 &= /r + \frac{\Delta r}{2} / \cdot \sin u_2 \cdot \sin i \end{aligned}$$

Odejmując stronami otrzymamy:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= r \cdot \cos u_2 \cdot \cos L_2 - \sin u_2 \cdot \sin L_2 \cdot \cos i + \\ &\quad - \cos u_1 \cdot \cos L_1 + \sin u_1 \cdot \sin L_1 \cdot \cos i / + \\ &\quad + \frac{\Delta r}{2} / \cos u_2 \cdot \sin L_2 - \sin u_2 \cdot \sin L_2 \cdot \cos i + \\ &\quad + \cos u_1 \cdot \sin L_1 - \sin u_1 \cdot \sin L_1 \cdot \cos i \\ Y_2 - Y_1 &= r \cdot \cos u_2 \cdot \sin L_2 + \sin u_2 \cdot \cos L_2 \cdot \cos i + & /6/ \\ &\quad - \cos u_1 \cdot \sin L_1 - \sin u_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos i / + \\ &\quad + \frac{\Delta r}{2} / \cos u_2 \cdot \sin L_2 + \sin u_2 \cdot \cos L_2 \cdot \cos i + \\ &\quad + \cos u_1 \cdot \sin L_1 + \sin u_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos i / \\ Z_2 - Z_1 &= r \cdot \sin i \cdot \sin u_2 - \sin u_1 / + \frac{\Delta r}{2} \sin i \cdot \sin u_2 + \sin u_1 / \end{aligned}$$

Ponieważ

$$L_2 = L_1 + \Delta L$$

możemy napisać stosując rozwinięcie w szereg:

$$\begin{aligned} \sin L_2 &= \sin L_1 + \Delta L / = \sin L_1 + \Delta L \cdot \cos L_1 - \frac{\Delta^2 L \cdot \sin L_1}{2} - \frac{\Delta^3 L \cdot \cos L_1}{6} + \dots \\ \cos L_2 &= \cos L_1 + \Delta L / = \cos L_1 - \Delta L \cdot \sin L_1 - \frac{\Delta^2 L \cdot \cos L_1}{2} + \frac{\Delta^3 L \cdot \sin L_1}{6} + \dots \end{aligned} \quad /7/$$

Jeżeli $\Delta t = 2^m$ to $\Delta L \approx 30'$, zaś $\Delta^3 L = 6,6 \cdot 10^{-7}$, można zatem ograniczyć się do wyrazów rzędu $\Delta^2 L$.

Podstawiając do /6/ otrzymamy dla Y-ów:

$$\begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= r \cdot \left[\cos u_2 \cdot \sin L_1 + \Delta L \cdot \cos L_1 - \frac{\Delta^2 L \cdot \sin L_1}{2} / + \right. \\ &\quad + \sin u_2 \cdot \cos i \cdot \cos L_1 - \Delta L \cdot \sin L_1 - \frac{\Delta^2 L \cdot \cos L_1}{2} / + \\ &\quad \left. - \cos u_1 \cdot \sin L_1 - \sin u_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos i \right] + & /8/ \\ + \frac{\Delta r}{2} &\left[\cos u_2 \cdot \sin L_1 + \Delta L \cdot \cos L_1 / + \sin u_2 \cdot \cos i \cdot \cos L_1 - \Delta L \cdot \sin L_1 / + \right. \\ &\quad \left. + \cos u_1 \cdot \sin L_1 + \sin u_1 \cdot \cos L_1 \cdot \cos i \right] \end{aligned}$$

Ponieważ kierunki osi XY były założone zupełnie dowolnie, możemy przyjąć taki kierunek osi X aby $L_1 = 0$. Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= r \cdot \left[\cos i \cdot \sin u_2 - \sin u_1 / + \cos u_2 \cdot \Delta L - \sin u_2 \cdot \cos i \cdot \frac{\Delta^2 L}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{\Delta r}{2} \left[\cos i \cdot \sin u_2 + \sin u_1 / + \cos u_2 \cdot \Delta L \right] \end{aligned} \quad /9/$$

i podstawiając /4'/:

$$\begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= r \cdot /2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \cos u \cdot \cos i + \Delta L \cdot \cos u_2 - \frac{\Delta^2 L}{2} \sin u_2 \cdot \cos i / + \\ &\quad + \frac{\Delta r}{2} / 2 \cos \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin u \cdot \cos i + \Delta L \cdot \cos u_2 / \end{aligned} \quad /10/$$

Podobnie dla pozostałych współrzędnych otrzymamy:

$$x_2 - x_1 = -r/2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin u + \Delta L \cdot \sin u_2 \cdot \cos i + \frac{\Delta^2 L}{2} \cdot \cos u_2 / + \\ + \frac{\Delta r}{2} / 2 \cos \frac{\Delta u}{2} \cdot \cos u - \Delta L \cdot \sin u_2 \cdot \cos i /$$

/10'/

$$z_2 - z_1 = r \cdot 2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \cos u \cdot \sin i + \Delta r \cdot 2 \cdot \cos \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin u \cdot \sin i$$

/10"/

Podnosząc równania /10/ do kwadratu i sumując otrzymamy:

$$\begin{aligned} l^2 = r^2 \cdot \left[4 \cdot \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + 2 \cdot \sin \Delta u \cdot \cos i \cdot \Delta L + \Delta^2 L / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / + \right. \\ \left. + 2 \cdot \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \Delta^2 L / \sin u \cdot \cos u_2 - \cos u \cdot \sin u_2 \cdot \cos^2 i / + \right. \\ \left. + \frac{\Delta^4 L}{4} / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / \right] + r \cdot \Delta r \cdot \left[\Delta L \cdot \sin \Delta u \cdot \cos i + \right. \\ \left. + \Delta^2 L / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / - \cos \frac{\Delta u}{2} \cdot \Delta^2 L / \sin u \cdot \sin u_2 \cdot \cos^2 i + \cos u \cdot \cos u_2 \right] + \\ + \Delta^2 r \left[\cos^2 \frac{\Delta u}{2} + 2 \cdot \sin \Delta u \cdot \cos i \cdot \Delta L + \Delta^2 L / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / \right] \end{aligned}$$

/11/

Aby to jeszcze nieco uprościć przekształćmy czwarte wyrażenie pierwszego nawiasu podstawiając:

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin u_2 - \frac{\Delta u}{2} / = \sin u_2 - \frac{\Delta u}{2} \cdot \cos u_2 + \dots \\ \cos u &= \cos u_2 - \frac{\Delta u}{2} / = \cos u_2 + \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin u_2 + \dots \\ \text{oraz} \quad \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \frac{\Delta u}{2} &\approx \frac{\Delta^2 u}{4} \end{aligned}$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \Delta^2 L / \sin u \cdot \cos u_2 - \cos u \cdot \sin u_2 \cdot \cos^2 i / = \\ 2 \cdot \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \Delta^2 L \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2u_2 \cdot \sin^2 i - \frac{\Delta u}{2} / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / \right] = \\ = \Delta^2 L \cdot \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin 2u_2 \cdot \sin^2 i - \frac{\Delta^2 u \cdot \Delta^2 L}{2} / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i / \end{aligned}$$

/12/

W wyrażeniu trzecim drugiego nawiasu możemy jeszcze zastąpić u przez u_2 i otrzymamy:

$$- \cos \frac{\Delta u}{2} \cdot \Delta^2 L / \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i /$$

Oznaczmy teraz:

$$\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cdot \cos^2 i = w^2$$

/13/

$$\begin{aligned} l^2 = r^2 \cdot \left[4 \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + 2 \sin \Delta u \cdot \cos i \cdot \Delta L + \Delta^2 L / w^2 + \sin \frac{\Delta u}{2} \cdot \sin 2u_2 \cdot \sin^2 i / + \right. \\ \left. - \frac{\Delta^2 u \cdot \Delta^2 L}{2} \cdot w^2 + \frac{\Delta^4 L}{4} \cdot w^2 \right] + r \cdot \Delta r \cdot \left[\Delta L \cdot \sin \Delta u \cdot \cos i + \frac{\Delta^2 L}{2} / w^2 + \right. \\ \left. - w^2 \cdot \cos \frac{\Delta u}{2} / \right] + \Delta^2 r \left[\cos^2 \frac{\Delta u}{2} + \frac{\Delta L}{2} \cdot \sin \Delta u \cdot \cos i + \frac{\Delta^2 L}{4} w^2 \right] \end{aligned}$$

/14/

3. Uwagi końcowe

We wzorze 14 występują po prawej stronie następujące parametry w swych wielkościach całkowitych: r , i oraz u_2 . Promień wodzący r przy orbitach typu Echo jest rzędu 7500 km, czyli ok. 10 razy większy od odcinka l . Tak więc dokładność z jaką powinien on być określony wynosić będzie ok. ± 100 . $\cos i$ oraz $\sin i$ występują w wyrażach począwszy od drugiego rzędu i ich wpływ nie będzie zbyt silnym. Z rachunku wynika, że dokładność wyznaczenia i równa $\pm 0,01$ jest wystarczająca. u_2 występuje w wyrażach począwszy od trzeciego rzędu, w związku z tym wystarczająca tu będzie dokładność $\pm 0,5$. Parametry Δu , ΔL , Δr są to zmiany elementów u , L i r odpowiadające dwumutowemu odstępowi czasu. Zmiany te można obliczyć z dokładnością przewyższającą potrzeby niniejszego zadania.