

Der Radiusvektor künstlicher Satelliten als Bestimmungsgröße der dreidimensionalen Geodäsie¹

Von Janusz B. Zieliński, Warszawa

Um den Radiusvektor des Satelliten als Basis auszunützen, muß seine Länge unabhängig von den ausgeführten Linienmessungen auf der Erde bezeichnet werden. Dies läßt sich bei Anwendung der Kepler-Methode durchführen, jedoch ist hierzu mit größter Genauigkeit der Wert der Konstanten von Gauß mal Erdmasse, sowie das Perturbationspotential der

Satellitenbewegung notwendig. In dem Referat ist die Theorie der Perturbation des Kepler-Radius-Vektors als auch die Diskussion betreffend die neuesten Bestimmungen der Gravitationskonstante mal Erdmasse mittels Radiomethoden angegeben.

Eine der Grundaufgaben der neuzeitlichen höheren Geodäsie ist die Bestimmung der homogenen Koordinaten einer großen Anzahl von Punkten, die über die ganze Erdoberfläche verteilt sind. Diese Aufgabe ist mit Hilfe von Methoden der klassischen Geodäsie sehr schwierig zu lösen. Daher wird jetzt die Aufmerksamkeit auf die neuen Möglichkeiten gelenkt, welche sich durch die Verwendung von künstlichen Erdsatelliten ergeben. So stellt zum Beispiel die kosmische Triangulation durch Synchronbeobachtungen einen bedeutenden Fortschritt in dieser Richtung dar.

Das homogene Weltsystem der geodätischen Koordinaten, welches wir zu erhalten wünschen, muß folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Orientierung dieses Systems muß absolut sein, d. h., die Richtung der Achse Z muß mit der Richtung der mittleren Umdrehungsachse der Erde übereinstimmen, und die beiden übrigen Achsen müssen sich in der Äquatorebene befinden.
2. Der Ursprung des Systems muß sich mit dem Massenmittelpunkt der Erde decken.
3. Sein Maßstab muß überall gleich sein.

Die Erfüllung obiger Bedingungen ist bei Anwendung von Methoden der klassischen Geodäsie nicht nur infolge der Entfernungen zwischen den verschiedenen Kontinenten und den einzelnen geodätischen Systemen erschwert, sondern auch dadurch, daß zur Berechnung und Ausgleichung der ausgedehnten Triangulationsnetze die Annahme von dieser oder jener Hypothese in bezug auf den inneren Bau der Erde notwendig ist. Die Methode der kosmischen Triangulation stellt insofern einen Fortschritt dar, daß sie sehr gut die Erfüllung der Bedingung 1 sicherstellt und in Zukunft gewiß instande sein wird, auch die Bedingung 3 zu erfüllen. Zur Erfüllung von Bedingung 2 bei Anwendung von Satellitenmethoden ist jedoch auch die Ausnützung der dynamischen Eigenschaften der Bewegung des künstlichen Satelliten erforderlich. So ist also für die Bestimmung

der Elemente geometrischen Typs die Ausnützung der Angaben des physischen Typs notwendig.

Die Ergebnisse der Arbeiten von [1] und [2] bezeugen, daß eine solche Aufgabe mit zufriedenstellender Genauigkeit gelöst werden kann. Diese Arbeiten sind dadurch charakterisiert, daß gleichzeitig die Konstanten des Gravitationsfeldes der Erde und die Koordinaten der Station bestimmt werden. In diesen Methoden wurden Absolutgrößen der Koordinaten des Satelliten im gegebenen Moment angewendet. Die Autoren dieser Arbeiten erzielten Ergebnisse von guter innerer Übereinstimmung, welche sich jedoch im einzelnen bedeutend voneinander unterscheiden.

In diesem Referat möchte ich den Grundriß einer etwas anderen Methode darstellen. Wir werden von den Bahnelementen des künstlichen Satelliten nur die Längeneinheit betrachten, die durch den Radiusvektor des Satelliten bestimmt ist, bei der Annahme, daß die Konstanten des Gravitationsfeldes bekannt sind.

Natürlich können zu einem solchen Zweck nur einige Satelliten und einige Bahntypen verwendet werden. Die wichtigsten Forderungen sind folgende:

1. Die Bahn muß kreisförmig oder fast kreisförmig sein.
2. Der Satellit muß sich über der Atmosphäre bewegen, d. h. höher als 1000 km. Entfernungen dieser Größenordnung sind auch bei der Konstruktion von Dreiecken oder anderen geometrischen Figuren auf der Erdoberfläche minimal.
3. Das Verhältnis Fläche/Masse des Satelliten muß minimal sein und seine Gestalt einer Kugel angenähert.

Berechnungsmethode der Bahn

Wie bekannt, haben auf die aus Beobachtungen berechneten Bahnelemente die Fehler der geozentrischen Koordinaten der Beobachtungsstationen wesentlichen Einfluß.

¹ Vortrag anläßlich der Internationalen Fachtagung Geodäsie 1964 an der Technischen Universität Dresden vom 28. September bis 1. Oktober 1964.

[1] Kaula, W. M.: Tesseral harmonics of the gravitational field and geodetic datum shifts derived from camera observations of satellites. *J. of Geophys. Res.* **68** (1963) Nr. 2.

[2] Anderle, R. J., u. C. Oesterwinter: A preliminary potential for the Earth from Doppler observations on satellites. *Pres. 4-th COSPAR Space Sci. Sym.*, Warsaw, 1963.

Diese Fehler kann man gleichzeitig mit der Bestimmung der Gravitationskonstanten bestimmen, wie dies die Autoren obengenannter Methoden machten. In unserem Falle handelt es sich jedoch nicht um fehlerlose Bestimmung aller Elemente, sondern nur um das die Länge bezeichnende Element, also um die große Halbachse der Bahn a . Dieses Element erhalten wir auf Grund der gemessenen Umlaufperiode P bei Anwendung des dritten Kepler-Gesetzes

$$n^2 \cdot a^3 = f \cdot M.$$

Die Periode kann man am einfachsten unabhängig von den Koordinaten des Beobachtungspunktes bestimmen, wenn man auf der gleichen Station zwei aufeinanderfolgende Satellitendurchgänge beobachtet. Diese Regel können wir ebenso auf eine größere Anzahl von Durchgängen als auch eine größere Anzahl von Stationen erweitern. Die übrigen Bahnelemente berechnen wir in normaler Weise, zum Beispiel durch aufeinanderfolgende Annäherungen. Dabei ist zu beachten, daß ihre Genauigkeit infolge fehlerhafter Koordinaten der Stationen etwas niedriger sein wird.

Konstante des Gravitationsfeldes der Erde

Wie vorher erwähnt, nehmen wir an, daß die Konstanten des Gravitationsfeldes der Erde bekannt sind. Wir wollen daher einen kurzen Überblick über die bisherigen Werte geben, um festzustellen, ob ihre Bestimmungsgenauigkeit zur Lösung dieser Aufgabe ausreichend ist. Grundsätzliche Bedeutung hat die Größe $f \cdot M$, welche neben der gemessenen Umlaufperiode P des Satelliten die Halbachse a der Bahn bezeichnet. Diese Größe wurde wiederholt bestimmt, und zwar bei Anwendung von verschiedenen Methoden. Die eingehende Analyse dieser Bestimmungen führte Kaula [3, 4] aus. Abgesehen von den Ergebnissen, die deutlich von den übrigen abweichen und mit nicht technologisch geprüften Methoden erhalten worden sind, erhalten wir folgende Tabelle:

Tabelle 1

Methode	Autor	$f \cdot M$ km ³ · sek ⁻²
Geodätische Messungen	Fischer (1962)	398 604,0
	Kaula (1961)	398 602,0
	Kaula + Uotila (1962)	398 604,3
Radar-messung der Entfernung Erde—Mond	Yaplee u. and. (1963)	398 605,7
Mondbewegung + geodätische Messungen	Fischer (1962) + O'Keefe + Anderson	398 605,7
Messung mit Doppler-Methode der Entfernung Erde — kosmische Rakete	Hamilton u. and. (1963)	398 601,6
Photogr. Beob. v. künstl. Satelliten	Kaula (1963) 1960	398 603,7
	Iota 2	
	Kaula (1963) 1961	
	Alpha Delta 1	398 599,3
Kompilation	NASA	398 603,2
Kompilation	Michajlow (1964)	398 603

Besonderer Aufmerksamkeit in obiger Zusammenstellung bedarf die Bestimmung der Entfernung Erde — Mond mittels Radarmessungsmethode. Diese Methode ist fast unabhängig von den auf der Erdoberfläche ausgeführten geo-

dätischen Messungen. Dadurch haben wir die Möglichkeit zur Befreiung der mit dem Radiusvektor des Satelliten bezeichneten Längeneinheit vom Fehlerinfluß geodätischer Messungen. Dies ist jedoch eine Perspektive für die Zukunft, da bisher andere Fehlerquellen dieser Methode nicht eliminiert sind. Die gesuchte Größe $f \cdot M$ bestimmen wir aus der Formel

$$f \cdot M = \frac{n^2 \cdot A^3 (1+\beta)^3}{1 + \frac{M_m}{M_e}},$$

worin n — mittlere Bewegung des Mondes, A — seine mittlere Entfernung von der Erde, β — Sonnenperturbation der großen Halbachse, M_e — Erdmasse, M_m — Mondmasse. Die mit Radar ausgeführte Messung der Entfernung hat eine Genauigkeit von ± 200 m. Da jedoch die Figur des Mondes und auch seine Topographie nicht genau bekannt sind, muß angenommen werden, daß der Mondradius in Richtung Erde mit einer Ungenauigkeit von ungefähr 2 km belastet sein kann. Das Verhältnis der Erdmasse zur Mondmasse, welches auf Grund von Beobachtungen des Planeten Eros bestimmt wurde, beträgt $81,219 \pm 0,026$. Auf Grund von Doppler-Beobachtungen der Rakete Mariner 2 ist das Verhältnis zu $81,3015 \pm 0,0033$ berechnet worden. Obige Ungenauigkeiten verursachen eine Unsicherheit der Bestimmung von $f \cdot M$ der Größenordnung $7 \text{ km}^3 \cdot \text{sek}^{-2}$.

Die beiden letzten Werte, welche in Tabelle 1 angegeben sind, sind nicht das Resultat einzelner Bestimmungen, sondern gehen aus der Analyse und der Betrachtung aller bisher ausgeführten Messungen und Angaben hervor. Auf der Grundlage dieses Materials kann man zu dem Schluß kommen, daß der Wert $f \cdot M$ von NASA angenommen und von Michajlow vorgeschlagen, in den Fehlergrenzen $\pm 2 \text{ km}^3 \cdot \text{sek}^{-2}$ anzunehmen ist.

Die Erdabplattung oder die zweite zonalharmonische Oberschwingung sind mittels verschiedener Methoden mehrmals bestimmt worden. Als genaueste erwiesen sich die Satellitenmethoden, dank welcher diese Größe jetzt mit großer Genauigkeit bekannt ist. Wir werden hier keine Zahlenangaben machen, auf Grund ihrer Analyse kann man feststellen, daß die Genauigkeit des jetzt bekannten Koeffizienten c_{20} von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-4}$ ist.

Nach Durchführung einer ähnlichen Analyse der weiteren Koeffizienten erhalten wir bei sehr vorsichtiger Beurteilung die Genauigkeiten:

$$\begin{array}{lll} c_{30} & 4 \cdot 10^{-2} & c_{22} \quad 5 \cdot 10^{-1} \\ c_{40} & 2 \cdot 10^{-1} & d_{22} \quad 5 \cdot 10^{-1} \end{array}$$

Durch das Gravitationsfeld der Erde verursachte Störungen

Die jetzt in der Geodäsie geforderte Genauigkeit der Längenbezeichnung ist von der Ordnung 10^{-6} . Von diesem Gesichtspunkt aus ist die Frage zu beantworten, welche Genauigkeit der Konstanten des Gravitationsfeldes notwendig ist sowie die Anzahl der zu berücksichtigenden Glieder bei der Berechnung der Störung des Radiusvektors des künstlichen Satelliten.

Wenn es sich um die Konstante $f \cdot M$ handelt, so ist ihr Einfluß folgender:

$$3 a^2 n^2 da = d(f \cdot M).$$

[3] Kaula, W. M.: Review of geodetic parameters. NASA Technical Note D-1847, 1963.

[4] Kaula, W. M.: Determination of the Earth's Gravitational Field. Rev. of Geophys. 1963, 1 Nr. 4.

Den Verlauf dieser Funktion für Kreisbahnen in verschiedenen Höhen stellt Bild 1 dar.

Wenn es sich um Störungen handelt, muß darauf geachtet werden, daß uns nur kurzperiodische Störungen interessieren, welche in der Zeit eines Satellitenumlaufes auftreten. Langperiodische und säkulare Perturbationen sind in den Veränderungen der mittleren Elemente der Bahn sichtbar, und wir erhalten diese aus Beobachtungen.

Zur Beurteilung des Einflusses der einzelnen Glieder der Entwicklung des Potentials auf die Größe des Radiusvektors wurde die Arbeit [5] herangezogen, in welcher die Bewegung eines Polarsatelliten mit der Periode 2 Stunden durch numerische Integration nach Cowell untersucht wurde. Diese Beurteilung ergab folgende Resultate:

$c_{20} \cdot 5 \cdot 10^{-4}$		10 m
c_{22}		20 m
d_{22}		20 m
c_{30}		50 m
c_{40}		20 m

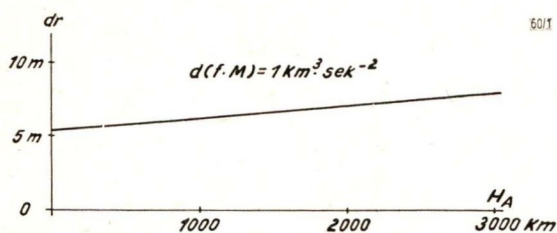


Bild 1

Der Einfluß des Gliedes n -ter Ordnung wird mit dem Faktor $\left(\frac{R}{r}\right)^n$ bezeichnet, worin R – Äquatorradius der Erde, r – Radiusvektor des Satelliten. Im Zusammenhang damit verringert sich der Einfluß der weiteren Glieder schnell, besonders bei höheren Bahnen. Da gleichzeitig mit dem Anstieg der Höhe der Bahn der Einfluß des Größenfehlers $d(f \cdot M)$ größer wird, wird man daher die Bahn so optimieren können, daß $f \cdot M$ nach Ausführung von Messungen verbessert werden kann.

Andere Störungen

Der Bahntyp und die Satellitenform sind so gewählt worden, daß die Störungen durch den Atmosphärenwiderstand und den Druck der Sonnenstrahlung minimal werden. Zur Untersuchung dieses Einflusses wurden auf der Grundlage der Formeln von [6] Berechnungen für den Satelliten Alouette (fast Kreisbahn, h_a ungefähr 1000 km, Form fast kugelförmig) durchgeführt. Es wurde eine Variation der Halbachse der Bahn in der Zeit eines Umlaufs von 0,25 m berechnet. Aus der Beobachtung dieses Satelliten zeigte sich jedoch, daß diese Variation noch wenigstens um eine Größenordnung kleiner ist.

Anwendung der Radiusvektor-Theorie

Da wir die Möglichkeit der Berechnung des Radiusvektors des künstlichen Satelliten haben, können wir auf der

[5] Kotchina, N. G.: Influence des anomalies de la gravitation de la Terre sur le mouvement des satellites artificiels. Tr. Inst. Teor. Astron. 1962 Nr. 9 (Leningrad).

[6] Proskurin, B. F., u. J. W. Batrakow: O wozmuszezenijach orbit sputnikow wyzywajemych soprotiwleniem wozducha. Isk. Sp. Ziemli 1959 Nr. 3.

Erdoberfläche verschiedene geometrische Konstruktionen bilden, welche sich durch folgende Merkmale auszeichnen:

1. Sie werden unmittelbar mit dem Massenmittelpunkt der Erde verbunden sein.
2. Ihr Maßstab wird von den Messungen nach geodätischen Methoden unabhängig sein.

Dies gestattet den Vergleich der Ergebnisse von bisherigen Messungen mit den Messungen, welche mit anderen Methoden ausgeführt wurden, und die Bildung eines geodätischen Systems, welches mit dem Massenmittelpunkt der Erde verbunden ist.

Eine der Anwendungen dieser Theorie ist das Projekt, welches die Möglichkeiten der Entfernungsbestimmung „Beobachter – wirkliche Rotationsachse der Erde“ auf Grund der Beobachtung eines Polarsatelliten betrifft. Dieses Projekt stützt sich auf die Erscheinung, daß sich die Bahnebene des künstlichen Satelliten im Vergleich zur Rotationsbewegung der Erde sehr langsam bewegt. Wenn wir von irgendeinem Punkt P auf der Erdoberfläche zwei Beobachtungen des Satelliten während seiner beiden aufeinanderfolgenden Durchgänge durch die Parallelkreisebene (beziehungsweise durch den Großkreis des topozentrischen Himmelsäquators) ausführen, so erhalten wir die Situation wie in Bild 2. Die Winkel α_1 , α_2 und σ kennen

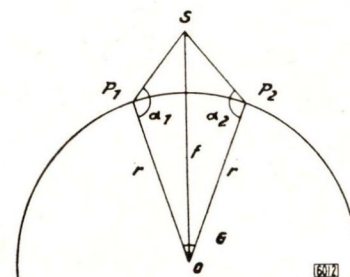


Bild 2

wir aus der Beobachtung, die Größe f bestimmen wir aus der Theorie des Radiusvektors, und die Entfernung r können wir ohne Schwierigkeiten berechnen. Wie aus der Analyse hervorgeht, muß man die Bahnelemente mit folgender Genauigkeit kennen, wenn die Genauigkeit von r nicht geringer als 100 m sein soll (für die Breite $\approx 50^\circ$):

$$\begin{aligned} m_p &= \pm 0,01 \\ m_e &= \pm 0,00001 \\ m_M &= \pm 3^\circ \\ m_{\Delta\Omega/1^d} &= \pm 0,001 \\ m_{T\Omega} &= \pm 0,01 \end{aligned}$$

Genauigkeit der Beobachtungen

$$\begin{aligned} m_{\alpha, \delta} &= \pm 2'' \\ m_t &= \pm 0,002 \end{aligned}$$

Ein anderes Beispiel der beschriebenen Theorie kann ihre Anwendung in Problemen der kosmischen Triangulation sein, die durch synchrone Beobachtungen ausgeführt wird. Bei Kenntnis des Radiusvektors des Satelliten und im Besitz des gemessenen Zeitabstandes zwischen den beiden Momenten t_1 und t_2 können wir die Länge des Abschnitts im Raum zwischen zwei Punkten, in welchen sich der Satellit in den Momenten t_1 und t_2 befand, berechnen. Diese Situation stellt Bild 3 dar.

A geometric diagram illustrating a configuration involving two points, \$S_1\$ and \$S_2\$, located on a curved boundary. Solid lines connect \$A\$ to \$S_1\$, \$A\$ to \$S_2\$, and \$B\$ to \$S_1\$. Dashed lines connect \$A\$ to \$S_2\$ and \$B\$ to \$S_1\$. A dashed line segment connects \$S_1\$ and \$S_2\$ and is labeled with the letter \$l\$.

Angaben können wir ohne Schwierigkeiten das Tetraeder auflösen und die Länge sowie die Richtung der Kante AB berechnen. Diese Kante stellt eine der Seiten des dreidimensionalen Triangulationsnetzes dar.

Schlußbemerkungen

Verfasser:

(Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 14 (1965) H. 3)