

Janusz B. Zieliński

Zastosowanie promienia wodzącego sztucznego satelity Ziemi jako miary długości w geodezji

§ 1. Ogólny zarys metody

Znanym w naukach przyrodniczych jest fakt, że możemy mierzyć odstępy czasu ze znacznie większą dokładnością niż długości. Zegary zachowujące stałość chodu rzędu 10^{-9} nie należą dziś do rzadkości, gdy tymczasem pomiary geodezyjne z dokładnością 10^{-6} stanowią ciągle skomplikowany problem techniczny. Dlatego też podejmowane są liczne próby zastąpienia bezpośredniej metody pomiaru odległości metodami pomiaru czasu, który w danym fizycznym zjawisku jest funkcją długości interesującego nas odcinka. Do metod takich należą pomiary długości za pomocą fal radiowych i świetlnych rozchodzących się ze znaną prędkością.

W astronomii znane jest również zjawisko, w którym zachodzi ściśle określony związek między czasem a długością — jest nim nieperturbowany ruch punktu materialnego wokół ciała o skończonej masie, tzw. ruch keplerowski. W ruchu tym orbita jest elipsą, której wielka półoś a i okres obiegu P związane są trzecim prawem Keplera

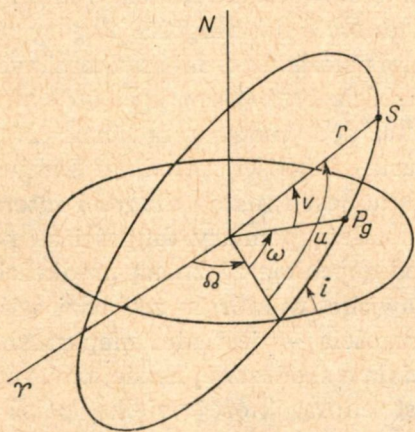
$$\frac{a^3}{P^2} = \text{const.} \quad (1.1)$$

Próba wykorzystania tej zależności jest myślą przewodnią niniejszej pracy. W grę wchodzi oczywiście sztuczne ciała niebieskie, których orbity mają rozmiary porównywalne z rozmiarami Ziemi i mogą być kształtowane przez człowieka w celu uzyskania optymalnych warunków. Poza tym ruch sztucznego satelity odbywa się przede wszystkim pod wpływem pola grawitacyjnego Ziemi i stąd wynika druga podstawowa cecha tej metody, tj. możliwość odniesienia wykonywanych pomiarów do środka mas Ziemi.

Jak wiadomo, jednym z podstawowych zadań współczesnej geodezji wyższej jest uzyskanie możliwości wyznaczania jednorodnych współrzędnych punktów na całej powierzchni Ziemi w jednym układzie, którego położenie względem fizycznych fundamentalnych elementów bryły ziemskiej — jej środka mas i osi obrotu — byłoby znane. Szczególnym i najkorzystniejszym przypadkiem będzie, jeśli początek tego układu pokrywać

się będzie ze środkiem Ziemi, a jedna z osi z osią obrotu Ziemi. Dodatkowym niełatwym do spełnienia warunkiem jest, aby skala takiego światowego układu geodezyjnego była wszędzie jednakowa.

Spełnienie powyższych warunków za pomocą metod geodezji klasycznej jest trudne nie tylko z powodu odległości między różnymi kontynentami i oddzielnymi systemami geodezyjnymi oraz konieczności zgromadzenia olbrzymiej ilości danych obserwacyjnych, ale także i dlatego, że do obliczenia i wyrównania rozległych sieci triangulacyjnych niezbędne jest przyjęcie takiej lub innej hipotezy odnośnie wewnętrznej budowy Ziemi. Pojawienie się metod satelitarnych otworzyło nowe szerokie możliwości. W metodach tych pomiary kierunków wykonywane są w układzie współrzędnych astronomicznych — deklinacja i rektascenzja —



Rys. 1. Niektóre elementy orbity

S — satelita; P_g — perigeum orbity; ∇ — kierunek punktu równonocy; Ω — rektascenzja węzła wstępującego; ω — argument szerokości perigeum; v — anomalia prawdziwa; u — argument szerokości; i — nachylenie orbity; r — promień wodzący

a więc takim, którego orientacja względem osi obrotu Ziemi, chwilowej czy też średniej, jest dokładnie znana. Jeśli wykorzystywane są elementy dynamiki ruchu satelity, w grę wchodzi bezpośrednio środek mas Ziemi. Przegląd i dyskusja wyników uzyskanych metodami dynamicznymi [Zieliński 1967] ujawnia wykorzystane dotychczas możliwości oraz wykazuje, jak pożądanym jest poszukiwanie nowych i udoskonalanie istniejących w tej dziedzinie sposobów.

Metoda proponowana w niniejszej pracy różni się od stosowanych dotychczas metod, w których wielkościami stanowiącymi główne ogniwo przy przejściu od elementów fizycznych związanych z polem grawitacyjnym do geometrycznych — opisujących położenie — były zawsze trójwymiarowe chwilowe współrzędne satelity. Porównywanie, wyrównywanie, przekształcanie tych współrzędnych prowadziło do końcowego rezultatu, jakim były geocentryczne współrzędne miejsca obserwacji. W niniejszej metodzie takim wyjściowym elementem ma być tylko promień wodzący, tzn. odległość od środka mas do satelity w danym momencie. Promień wodzący zmienia się o wiele wolniej — zwłaszcza w orbitach z małymi

mimośrodami — niż współrzędne, które zmieniają się z prędkością — dosłownie — kosmiczną. Główna uwaga została poświęcona przy tym samej teorii promienia wodzącego, zagadnieniu, jakie perturbacje powinny być uwzględniane i z jaką dokładnością jesteśmy je w stanie obliczyć. Natomiast sprawa zastosowań tej teorii została potraktowana raczej szkicowo. Z projektów wymienionych w § 6 tylko jeden sprawdzony został na materiale obserwacyjnym.

Przejdźmy teraz do bliższego omówienia metody. Elementem charakteryzującym liniowe rozmiary orbity jest jej wielka półoś a . Wyznaczać ją będziemy za pomocą pomiaru okresu obiegu albo — co na jedno wychodzi — ruchu średniego $n = \frac{2\pi}{P}$. Wprowadzając ruch średni możemy napisać:

$$n^2 \cdot a^3 = \mu \quad (1.2)$$

We wzorze tym μ oznacza masę Ziemi (ograniczając się do przypadku ruchu sztucznych satelitów) pomnożoną przez stałą grawitacyjną. Zobaczymy najpierw, jaki wpływ na dokładność a będzie miał błąd pomiaru okresu. Różniczkując (1.2) mamy:

$$da = \frac{P \mu dP}{6 a^2 \pi^2} \quad (1.3)$$

Przyjmując $dP = 0^s.01$, co z punktu widzenia możliwości obserwacyjnych jest zupełnie osiągalne, otrzymujemy dla orbit na wysokościach $1000 \div 3000$ km

$$da = 7 \text{ m.}$$

Odpowiada to dokładności względnej 10^{-6} .

Wielkość μ jest także obciążona pewnym błędem. Wpływa on na półoś następująco

$$da = \frac{a \cdot d\mu}{3\mu} \quad (1.4)$$

Przyjmując $\mu = 398\,603 \text{ km}^3\text{sek}^{-2}$ (zob. § 3) i $d\mu = 3 \text{ km}^3\text{sek}^{-2}$ otrzymamy dla

$$H = 1000 \text{ km} \quad da = 18 \text{ m}$$

$$H = 3000 \text{ km} \quad da = 23 \text{ m}$$

Wielkość μ i jej dokładność ma szczególne znaczenie w niniejszej teorii. Określa ona skalę układu czy konstrukcji geometrycznej, którą będziemy rozpatrywać w jakimś konkretnym przypadku. Jeżeli będziemy w stanie zejść z błędami przypadkowymi obserwacji i teorii poniżej

$\frac{\partial a}{\partial \mu} \cdot d\mu$, to zaistnieje możliwość poprawienia μ przez porównanie z wynikami innych metod pomiarowych. W każdym razie błąd μ będzie występował jako błąd systematyczny, nie powodujący lokalnej deformacji danej konstrukcji.

Od wielkiej półosi do promienia wodzącego przechodzimy za pomocą wzoru:

$$r = a(1 - e \cdot \cos E). \quad (1.5)$$

gdzie e — mimośród orbity, E — anomalia mimośrodowa.

Na podstawie tych krótkich rozważań dochodzimy do wniosku, że dokładność, jaką mamy szanse osiągnąć tą metodą jest rzędu 10^{-6} , co wynosi $7 \div 10$ m zależnie od wysokości orbity. Wobec tego przyjmujemy następującą regułę dotyczącą potrzeby wprowadzania poprawek perturbacyjnych i ich dokładności: będziemy uważali poprawki za zaniedbywalnie małe, jeżeli będą one dawały perturbację mniejszą niż 1 m w promieniu wodzącym oraz będziemy uważali je za wystarczająco dokładne, jeżeli dokładność ta będzie lepsza niż 1 m.

Naturalnie nie wszystkie typy orbit i nie wszystkie typy satelitów będą mogły być użyte w tej metodzie. Aby uniknąć szybkich zmian długości r wykorzystywać będziemy orbity o małych mimośrodkach typu satelitów ANNA Ib i Alouette, mniejszych od 0,01. Aby uniknąć zakłócających wpływów atmosfery, określimy dolną granicę wysokości na 1000 km nad powierzchnią Ziemi, zaś aby nie powiększać zbyt bezwzględnych wartości błędów, za górną granicę przyjmujemy 3000 km. Zakładamy dalej, że mamy do czynienia z tzw. satelitą ciężkim, o małym stosunku powierzchnia/masa, również podobnym do Anny lub Alouette.

Rzeczywisty ruch sztucznego satelity Ziemi różni się jednak dość mocno od ruchu keplerowskiego, znacznie bardziej niż np. ruchy planet. W związku z tym orbita keplerowska służy nam tylko jako pojęcie pomocnicze, nie realizowane w rzeczywistości. Orbitą oskulacyjną będziemy nazywać orbitę keplerowską, która jest ściśle styczna do rzeczywistego toru satelity w danym momencie, czyli taką, jaka powstałaby, gdyby w tym momencie siły perturbujące nagle zniknęły. Można więc sobie wyobrazić, że rzeczywista orbita składa się z nieskończenie małych odcinków orbit oskulacyjnych, lub też, że jest to orbita analogiczna do keplerowskiej, ale o zmieniających się elementach. Zmiany tych elementów będziemy nazywać perturbacjami w elementach.

Wśród perturbacji rozróżniamy: *wieko*we, zmieniające się progresywnie z czasem i *okreso*we, a wśród tych ostatnich *krótkookresowe* o okresie równym okresowi obiegu, *dobowe* o okresie równym dobie płaszczyzny orbity, czyli okresowi, w którym Ziemia obróci się względem płaszczyzny orbity o 360° , i *długookresowe* o okresie równym okresowi zmiany argumentu perigeum o kąt pełny.

Obok pojęcia elementów oskulacyjnych spotykamy się z pojęciem elementów średnich. Ponieważ różni autorzy oznaczają tą nazwą różne wielkości, należy je ściśle zdefiniować. Przez poprawkę perturbacyjną rozumiemy poprawkę zawierającą tylko perturbacje krótkookresowe i dobowe. Element średni będzie równy elementowi oskulacyjnemu mniej poprawka perturbacyjna, tzn.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_s + \delta_\varepsilon \quad (1.6)$$

gdzie ε_0 — element oskulacyjny,
 ε_s — element średni,
 δ_ε — poprawka perturbacyjna.

Do analizy dokładności wyznaczenia długości promienia wodzącego stosować będziemy następujące rozumowanie: będziemy zawsze uważali, że mamy odpowiedni zbiór obserwacji rozmieszczonych korzystnie w przestrzeni i czasie, pozwalający obliczyć z zadowalającą dokładnością elementy średnie orbity i ich zmiany. W ten sposób przestajemy się interesować wszystkimi perturbacjami długookresowymi, gdyż będą one zawarte w zmianach elementów średnich. Do uwzględniania pozostaną tylko perturbacje krótkookresowe i dobowe.

Pod pojęciem okresu obiegu rozumiemy będziemy okres anomalistyczny orbity oskulacyjnej w danej epoce t .

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że do obliczania perturbacji spowodowanych przez kolejne harmoniki ziemskiego potencjału grawitacyjnego używamy wartości współczynników tych harmonik, wyznaczanych z obserwacji satelitów. Nie wchodzimy jednak bynajmniej w ten sposób do błędnego koła, gdyż tamte wyznaczenia są oparte na obserwowanych zmianach wiekowych, wielokrotnie większych od obliczanych tu krótkookresowych.

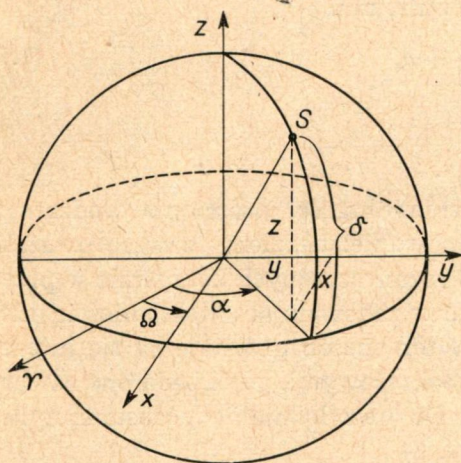
§ 2. Obliczenie elementów orbity i jego dokładność

Sposoby obliczania orbit sztucznych satelitów na podstawie obserwacji kierunków, a takimi tylko będziemy się tu zajmować, są to nieco tylko zmodyfikowane sposoby astronomii klasycznej, używane do obliczania orbit małych planet i komet. Do nich należy metoda tzw. poprawiania orbity przeznaczona do obliczania elementów jak najdokładniej z danego materiału obserwacyjnego. Zasadą tej metody jest wyrażenie poprawek do obserwowanych współrzędnych α i δ przez funkcję poprawek do elementów orbity:

$$\Delta c = \sum \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_i} \cdot \Delta \varepsilon_i \quad (2.1)$$

Δc — poprawka współrzędnej,
 $\Delta \varepsilon_i$ — poprawka elementu orbity.

Tworzą się w ten sposób równania obserwacyjne, w których wolnymi wyrazami są różnice między współrzędnymi obserwowanymi a obliczonymi na podstawie elementów przybliżonych (O-C), niewiadomymi — poprawki do tychże przybliżonych elementów. Przyjmując współrzędne



Rys. 2. Układ współrzędnych $x y z$ używany do procesu poprawiania orbity

obserwowane α i δ oraz wprowadzając trójwymiarowy układ współrzędnych x, y, z , zdefiniowany jak na rysunku, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \cos \delta \Delta \alpha &= -\sin(\alpha - \Omega) dx + \cos(\alpha - \Omega) dy \\ \varrho \Delta \delta &= -\cos(\alpha - \Omega) \sin \delta dx - \sin(\alpha - \Omega) \sin \delta dy + \cos \delta dz \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

gdzie

$$dx = dx(\Omega, \omega, i, e, n, M_0), \quad dz = dz(\Omega, \omega, i, e, n, M_0)$$

$$dy = dy(\Omega, \omega, i, e, n, M_0), \quad \varrho - \text{odległość topocentryczna}$$

Z samej geometrii orbity wynika, że dokładność jej wyznaczenia zależy nie tylko od dokładności i ilości obserwacji, ale także od ich rozmieszczenia. Niemożliwe będzie dokładne wyznaczenie położenia węzła, gdy obserwacje będą skupione w pobliżu $u = 90^\circ$ lub 270° ; podobnie nie będziemy mogli wyznaczyć dobrze mimośrod, gdy obserwowany będzie tylko mały łuk orbity. Rozmieszczenie obserwacji zależy przy tym głównie od warunków widoczności, a więc wysokości orbity, jej usytuowania względem kierunku do Słońca. W naszych rozważaniach będziemy przyjmowali jednak, że obserwacje rozmieszczone są równomiernie co najmniej na łuku orbity $= 180^\circ$. Jak wynika z analizy podanej przez Soczylinę [1963], w takich warunkach wszystkie elementy zostaną wyznaczone z dokładnością tego samego rzędu. Soczylina oblicza współczynniki wagowe poszczególnych niewiadomych Q_{ii} :

$$\left. \begin{aligned} Q(M_0) &= \frac{9}{4} \frac{1}{Na^2} \\ Q(n) &= \frac{75}{4} \frac{1}{Na^2 t^2} \\ Q(\Omega) &= \frac{2}{Na^2} \\ Q(i) &= \frac{2}{Na^2} \\ Q(ax) &= \frac{1}{2Na^2} \\ Q(ay) &= \frac{1}{2Na^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

gdzie N — ilość obserwacji, t — okres obserwacji w dniach,

$$ax = e \cdot \cos \omega, \quad ay = e \cdot \sin \omega.$$

Dokładność poszczególnych elementów oblicza się wzorami:

$$m_{ei} = m_0 \sqrt{Q_{ii}} \quad (2.4)$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum_1^N [(\varrho \cdot \cos \delta \Delta \alpha)^2 + (\varrho \Delta \delta)^2]}{2N - 6}} \quad (2.5)$$

ϱ — odległość topocentryczna satelity.

Przyjmując dokładność obserwacji

$$m \delta = \cos \delta m \alpha = 2'',$$

co odpowiada

$$\varrho m \delta = \varrho \cos \delta m \alpha \cong 2 a \cdot 10^{-6},$$

otrzymamy

$$m_0 = 2 a \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{2N}{2N-6}} \cong 2 a \cdot 10^{-6}$$

Jeśli weźmiemy $N = 100$ i $t = 10^d$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} m_{M0} &= 3 \cdot 10^{-7} \text{rad} \\ m_n &= 10^{-7} \text{rad/d} \\ m_\Omega &= 2,6 \cdot 10^{-7} \text{rad} \\ m_i &= 2,6 \cdot 10^{-7} \text{rad} \\ m_{ax} &= 0,6 \cdot 10^{-7} \\ m_{ay} &= 0,6 \cdot 10^{-7} \\ m_e &= m_{ax} = m_{ay} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ponieważ

$$de = dax \cos \omega + day \sin \omega \quad (2.7)$$

$$m_e^2 = m_{ax}^2 (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega). \quad (2.8)$$

Nie został tu jednak wzięty pod uwagę czynnik wpływający w sposób istotny, a mianowicie błędy współrzędnych stacji obserwacyjnych. Czynnik ten nie występuje w zadaniach astronomii klasycznej z uwagi na wielkie odległości od obserwatora do obserwowanego obiektu. W wypadku sztucznych satelitów, ponieważ rozpatrujemy ruch geocentryczny, konieczna jest znajomość geocentrycznych współrzędnych miejsc obserwacji.

Bliższa analiza tego zagadnienia dokonana została w innej pracy autora [Zieliński 1967]. Wynika z niej, że w przypadku kiedy współrzędne stacji są wyznaczone tylko metodami astronomicznymi i trzeba się liczyć z tym, że błędy we współrzędnych x , y , z mogą dochodzić do ± 500 na skutek lokalnych odchyłeń pionu, wówczas wpływ na obserwowane współrzędne topocentryczne α i δ może być rzędu minut (np. dla orbity 1000 km nad Ziemią ok. 2',5). Należy się zatem zastanowić nad postępowaniem, które pozwoliłoby ów niekorzystny wpływ wyeliminować lub badać go zmniejszyć.

Można z góry przewidzieć, że dla niektórych elementów nie da go się usunąć ani drogą obliczeniową, ani przez zastosowanie jakiegoś specjalnego sposobu obserwacji. Są to elementy określające orientację orbity, a więc rektascenzję węzła wstępującego, nachylenie i argument perigeum. Elementy te zależą wprost od wybranego układu współrzędnych. Pozostałe trzy elementy nie zależą od układu współrzędnych, można więc sądzić, że uda się z nich wyeliminować wpływ błędów położenia stacji w całości lub choćby częściowo. Można udowodnić, że jest to możliwe dla ruchu średniego, a co za tym idzie — dla wielkiej pólności orbity.

W cytowanej powyżej pracy zostało wykazane, że wpływ błędów położenia miejsc obserwacji na topocentryczne obserwowane współrzędne satelity α i δ ma postać następującą:

$$(\Delta)\alpha = -\sin(\alpha - \Omega) dX + \cos(\alpha - \Omega) dy \quad (2.9)$$

$$(\Delta)\delta = -\cos(\alpha - \Omega) \sin \delta dX - \sin(\alpha - \Omega) \sin \delta dY + \cos \delta dZ,$$

gdzie dX, dY, dZ — błędy współrzędnych stacji w układzie związanym z osią obrotu Ziemi i linią węzłów orbity.

Załozymy, że mamy zbiór obserwacji wykonanych w ten sposób, że na każdej stacji obserwowano satelitę kilkakrotnie w czasie różnych przelotów. Możemy ułożyć dla każdej obserwacji równanie typu (2.2), a następnie stronami je odjąć, pamiętając że po stronie wyrazów wolnych występować będą także wyrazy $(\Delta)\alpha$ i $(\Delta)\delta$:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 \cos \delta_2 \Delta \alpha_2 + (\Delta) \alpha_2 - \varrho_1 \cos \delta_1 \Delta \alpha_1 - (\Delta) \alpha_1 &= -\sin(\alpha_2 - \Omega_2) dx_2 + \\ &+ \cos(\alpha_2 - \Omega_2) dy_2 + \sin(\alpha_1 - \Omega_1) dx_1 - \cos(\alpha_1 - \Omega_1) dy_1; \\ \varrho_2 \Delta \delta_2 + (\Delta) \delta_2 - \varrho_1 \Delta \delta_1 - (\Delta) \delta_1 &= -\cos(\alpha_2 - \Omega_2) \sin \delta_2 dx_2 + \\ &- \sin(\alpha_2 - \Omega_2) \sin \delta_2 dy_2 + \cos \delta_2 dz_2 + \cos(\alpha_1 - \Omega_1) \sin \delta_1 dx_1 + \\ &+ \sin(\alpha_1 - \Omega_1) \sin \delta_1 dy_1 - \cos \delta_1 dz_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Równania te będą uwolnione od wpływu błędów położenia stacji wtedy, gdy będzie

$$(\Delta) \alpha_1 = (\Delta) \alpha_2 \quad (2.11)$$

$$(\Delta) \delta_1 = (\Delta) \delta_2 \quad (2.12)$$

Warunek (2.12) będzie spełniony wówczas, gdy obserwacja zostanie wykonana w pobliżu równika topocentrycznego, tzn. δ będzie bliska zera. Jako równanie obserwacyjne może być wykorzystane wówczas drugie z równań (2.10), przy czym będziemy mogli obliczyć wtedy tylko ruch średni i jego pochodne. Mając obliczony w ten sposób ruch średni możemy powrócić do równań (2.2) i obliczyć poprawki do pozostałych elementów.

Obserwacje w momencie przejścia przez równik są jednak możliwe tylko dla satelitów o dużych nachyleniach i to nie we wszystkich szerokościach geograficznych. W innych wypadkach możemy wykorzystać pierwsze z równań (2.10) i warunek (2.11), który będzie spełniony, jeśli obserwacje wykonywać będziemy w pobliżu południka miejsca obserwacji.

W ten sposób, posługując się specjalnym sposobem obserwacji, możemy wyznaczyć ruch średni satelity, a zatem i wielką półoś orbity w sposób niezależny od błędów współrzędnych miejsc obserwacji. Pozwoli to również na częściowe uniezależnienie od tych błędów mimośrod orbity, którego dokładność jest ważna przy obliczaniu promienia wodzącego.

Wg Brouvera i Clemence'a [1961] str. 236:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= H \cdot x + K \cdot \dot{x} \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= H \cdot y + K \cdot \dot{y} \quad \frac{\partial z}{\partial e} = H \cdot z + K \cdot \dot{z}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{gdzie } H = \cos v, \quad K = \frac{2 \sin v}{n}.$$

Część pochodnej ze współczynnikiem H będzie nadal zawierać wpływ błędów położenia, ale druga część ze współczynnikiem K będzie już od tego wpływu uwolniona. Wynikałoby z tego, że dokładność wyznaczenia e będzie mniejsza niż n , jednak większa niż pozostałych elementów.

Powyższe rozważania jak również wyniki (2.6) upoważniają do stwierdzenia, że przy odpowiedniej ilości dobrze rozmieszczonych obserwacji i odpowiednim programie obserwacyjnym jesteśmy w stanie wyznaczyć dwa najbardziej nas interesujące elementy, tj. n i e z dokładnością co najmniej rzędu 10^{-6} .

§. 3. Stałe pola grawitacyjnego Ziemi

Zgodnie z zaleceniem Komisji Mechaniki Niebieskiej Międzynarodowej Unii Astronomicznej używać będziemy następującego wzoru na potencjał grawitacyjny Ziemi w przestrzeni zewnętrznej:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \beta) (C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda), \quad (3.1)$$

gdzie

$\mu = M \cdot k$ — masa Ziemi pomnożona przez stałą grawitacyjną,

r — odległość od środka masy,

R — promień równikowy Ziemi,

C_{nm}, S_{nm} — funkcje kuliste, tzw. złożone wielomiany Legendre'a, wyrażające się wzorem ogólnym:

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{2^n \cdot n} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right). \quad (3.2)$$

Funkcje P_{nm} w postaci rozpisanej do stopnia 4,4 oraz 5,0 i 6,0 przedstawione są w § 4. Jak wynika z wzoru (3.1), pod pojęciem potencjału grawitacyjnego rozumieć będziemy potencjał spowodowany przyciąganiem z pominięciem wpływu ruchu obrotowego Ziemi.

Stałe występujące w tym wzorze wyznaczone były wielokrotnie różnymi metodami, z wyjątkiem oznaczonych indeksami 10, 11 i 21, które są równe zeru na mocy definicji układu współrzędnych (środek układu pokrywa się ze środkiem mas Ziemi, oś z z osią obrotu). Dokonamy krótkiego przeglądu tych wyznaczeń w celu przekonania się w jakim stopniu można je uważać obecnie za kompletne. Unikać będziemy przy tym stosowania uśrednień w sensie arytmetycznym z tego powodu, że dokładność różnych wyznaczeń trudna jest do oceny. Składają się na nią oprócz błędów przypadkowych materiału obserwacyjnego także błędy systematyczne, charakterystyczne dla danej metody. Stąd trudność, a nawet niemożność ustalenia wag potrzebnych do uśrednienia.

Przez dokładność określenia jakiejś wielkości rozumieć będziemy przedział, w jakim zawarte są wszystkie jej wyznaczenia, wykonane metodami, które teoretycznie powinny dawać zbliżoną dokładność. Wartość odpowiadającą środkowi przedziału uważać będziemy za najprawdopodobniejszą prawdziwej.

Pierwsza ze stałych występujących we wzorze (3.1) — wielkość μ , oznaczająca masę Ziemi pomnożoną przez stałą grawitacyjną Gaussa — ma zasadnicze znaczenie w niniejszym temacie, ponieważ od niej zależy bezwzględna dokładność określenia długości promienia wodzącego. Z drugiej strony błąd przyjętej takiej a nie innej wartości μ wpływa tylko na skalę rozpatrywanej konstrukcji geometrycznej (np. sieci triangulacyjnej), natomiast nie powoduje deformacji lokalnych. Stwarza to możliwość — poprzez porównanie z pomiarami innego typu — ponownego wyznaczenia i udokładnienia μ .

Teoretycznie najbardziej przydatna do niniejszego zagadnienia metoda określenia μ polega na wykonaniu bezpośredniego pomiaru odległości Ziemia—Księżyc i ustalenia w ten sposób liniowych rozmiarów orbity Księżyca. μ wyznaczyć można wówczas ze wzoru:

$$\mu = \frac{n^2(1 + \beta)^3 a^3}{1 + \frac{M_M}{M_E}}. \quad (3.3)$$

gdzie n — ruch średni Księżyca,

a — wielka półoś,

β — jej słoneczna perturbacja,

M_M, M_E — masy Księżyca i Ziemi.

Wyznaczenie takie jest prawie zupełnie niezależne od pomiarów geodezyjnych na powierzchni Ziemi, ponieważ błąd współrzędnych geocentrycznych miejsca obserwacji jest stosunkowo mały w porównaniu z mierzonym dystansem. Źródłem błędów jest natomiast niedostateczna znajomość figury Księżyca, a ściślej jego promienia w kierunku Ziemi oraz zbyt mała dokładność stosunku M_M/M_E . Oceny długości promienia Księżyca wahają się od 1738 do 1740 km, zaś wartość M_M/M_E podawana jest w granicach 1/81,22—1/81,38. Powyższe rozbieżności powodują, że dokładność tej metody jest jeszcze w tej chwili niższa od innych. Nie ulega wszakże wątpliwości, że w najbliższych latach zarówno figura Księżyca, jak i stosunek M_M/M_E zostaną wyznaczone dokładniej metodami astronautycznymi, a w wyniku tego i wielkość μ . Obserwacje powyższą metodą zostały wykonane w Stanach Zjednoczonych, ich wyniki oraz dyskusję podaje Kaula [1963 c i d].

Wszystkie inne wyniki zamieszczone w tablicy 1 są w ten lub inny sposób zależne od pomiarów geodezyjnych, wykonanych na powierzchni Ziemi. Do tych klasycznych metod należy wyznaczenie μ z absolutnych pomiarów przyspieszenia ziemskiego, przy założeniu znajomości promienia równikowego Ziemi. Tablica 1 zawiera dwa rezultaty otrzymane tą metodą: Kauli [1961] oparty na jednoczesnym wyrównaniu materiału triangulacyjnego i grawimetrycznego oraz drugi oparty na wyznaczonym przez Uotilę [1962] γ_e i promieniu równika obliczonym przez Kaulę.

Także metoda oparta na pomiarze paralaksy księżycowej jest w wysokim stopniu zależna od dokładności, z jaką znamy rozmiary Ziemi, gdyż w istocie rzeczy jest to wyznaczenie odległości Ziemia—Księżyc za pomocą kąta paralaktycznego i znanej bazy na Ziemi. Obserwacje takie były wykonane na początku naszego stulecia w ciągu kilku lat w Greenwich i na Przylądku Dobrej Nadziei i obecnie zostały zredukowane ponownie przez Fischer [1962] z wykorzystaniem najnowszych wyników triangulacji, która łączy teraz te dwa odległe punkty. Wynik tej pracy uwidoczniiony jest na czwartym miejscu tab. 1.

Metoda zakryć gwiazd przez Księżyc, podana przez O'Keefe'a i Andersen [1952] daje się z powodzeniem zastosować do wyznaczenia μ , jeżeli przyjmiemy rozmiary Ziemi za znane. Używając obserwacji wykonanych przez O'Keefe'a i wyników Fischer dotyczących elipsoidy ziemskiej, Kaula [1963 d] wyznaczył μ (5 poz. tablicy 1).

Do tego samego celu używane były również obserwacje sztucznych satelitów — na zasadzie wykorzystania prawa Keplera i przy założeniu znanych rozmiarów Ziemi. Prace takie wykonał również Kaula [1963 a, b] (poz. 6 i 7 tabeli).

Tablica 1

Metoda	Autor	km 3^μ sek $^{-2}$
Pomiar radarowy odległości Ziemia — Księżyc	Yaplee i in. (1963)	398605,7
Pomiary geodezyjne	Kaula (1961)	398602,0
	Kaula + Uotila (1962)	398604,3
	Fischer (1962)	398604,0
Ruch Księżyca + pomiary geodezyjne	Fischer (1962) + O'Keefe	398605,7
	Anderson (1952)	
Obserwacje fotogr. sztucznych satelitów	Kaula (1963) 1960 Jota 2	398603,7
	Kaula (1963)	398599,3
	1961 Alpha Delta 1	
Kompilacja	NASA	398603,2
	Michajłow (1964)	398603

Dla porównania podajemy wartości μ przyjmowane do obliczeń w ośrodkach USA i ZSRR. Mieszczą się one dokładnie w środku przedziału wyznaczonego pozostałymi danymi zawartymi w tablicy 1. Upoważnia to do przyjęcia w niniejszej pracy wartości $\mu = 398\,603 \pm 3$ km 3 sek $^{-2}$.

Przechodząc do następnych wyrazów wzoru (3.1) na potencjał grawitacyjny rozpatrzmy najpierw tzw. harmoniki zonalne, tj. te składniki sumy, dla których $m = 0$. Liczbowe wartości tych wyrażeń określone są współczynnikami C_{n0} , które podobnie jak μ były wyznaczane wielokrotnie róż-

nymi metodami. W tym wypadku jednak zdecydowanie najlepsze wyniki dała metoda satelitarna. Przyczyna była prosta: brak dostatecznego materiału obserwacyjnego, który by posłużył do tego samego celu metodom grawimetrycznej i niwelacji astronomicznej. Porównanie możliwości tych trzech metod zrobione było w jednej z wcześniejszych prac autora [Zieliński 1963]. Podczas gdy dane grawimetryczne i geodezyjne odnoszą się zawsze tylko do pewnych fragmentów Ziemi, to w obserwowanych perturbacjach satelity odbija się wpływ całej bryły ziemskiej ze wszystkimi nieforemnościami. To jest przyczyną, że w nowszych opracowaniach materiałów geodezyjnych i grawimetrycznych przyjmuje się wyznaczone za pomocą satelitów wartości spłaszczenia i harmonik C_{20} , C_{30} , C_{40} , a nie traktuje się ich jako niewiadome. Nie oznacza to bynajmniej, że te ostatnie dane nie podlegają już dyskusji. Istnieje wiele źródeł błędów w metodzie satelitarnej, które uniemożliwiają rozwiązanie tego zadania za jednym razem. Na przykład przy obliczaniu pewnej skończonej ilości wyrazów uważa się, że wpływ wyrazów następnych jest równy zero, co jest oczywiście niezgodne z rzeczywistością. Inną przyczyną są błędy geocentrycznych współrzędnych stacji, a także perturbujące działanie innych czynników, głównie atmosfery.

Z dokonanego przeglądu aktualnych danych w tej dziedzinie [Zieliński 1967] wynika, że wszystkie C_{20} zawarte są w przedziale 1082.2—1083.3, zaś jeśli pominiemy wynik Żongłowicza, który jest oparty na obserwacjach satelitów wyłącznie niskich, górną granicą będzie 1083.15. Wobec tego do obliczeń przyjmiemy $C_{20} = (-1082.7 \pm 0.5) \times 10^{-6}$.

Przeprowadzając podobny przegląd wartości C_{30} znajdujemy przedział 2.29—2.59 i zgodnie z przyjętą zasadą będziemy mieli $C_{30} = (+2.45 \pm 0.15) \times 10^{-6}$.

Rozpatrując wartości C_{40} otrzymamy przedział 1.03—2.1 i przyjmujemy $C_{40} = (+1.60 \pm 0.50) \times 10^{-6}$, zaś dla C_{50} przedział $+0.07 - +0.23$ i przyjmujemy $C_{50} = (+0.15 \pm 0.08) \times 10^{-6}$.

Dla następnych otrzymamy:

$$C_{60} = (0.00 \pm 0.70) \times 10^{-6}$$

$$C_{70} = (+0.10 \pm 0.40) \times 10^{-6}$$

$$C_{80} = (-0.04 \pm 0.30) \times 10^{-6}$$

$$C_{90} = (-0.20 \pm 0.30) \times 10^{-6}$$

Zadanie to można by nieco inaczej potraktować przydając większy stopień zaufania wynikom nowszym i opartym na większej liczbie obserwacji, a wówczas przyjęte tu współczynniki niewątpliwie byłyby bliższe rzeczywistym. Jednakże celem niniejszej pracy jest nie znalezienie najprawdopodobniejszych wartości C_{nm} i S_{nm} , a zbadanie ich wpływu

przy ekstremalnych możliwych wartościach. Dlatego zastosowana metoda wydaje się racjonalna.

Jeżeli chodzi o harmoniki tesseralne ($n \neq m$), to materiał porównawczy jest tu znacznie uboższy, a rozbieżności większe. Możliwości metody satelitarnej są tu skromniejsze i stają się porównywalne z możliwościami metody grawimetrycznej. Na skutek obrotu Ziemi dookoła osi harmoniki tesseralne nie dają wyraźnych — jak harmoniki zonalne — efektów długookresowych w zmianach elementów orbit. Jeszcze silniej występuje wpływ błędów współrzędnych stacji i nierównomierności obserwacji. Wskutek tego, dla otrzymania poprawnych wyników trzeba dysponować większym materiałem niż został zgromadzony dotychczas.

W dalszej pracy używane będą dane wypośrodkowane w ten sam jak poprzednio sposób:

$$\begin{array}{ll}
 C_{22} = (+ 1.15 \pm 0.70) \times 10^{-6} & S_{22} = (- 1.25 \pm 1.00) \times 10^{-6} \\
 C_{31} = (+ 1.55 \pm 1.50) \times 10^{-6} & S_{31} = (+ 0.25 \pm 0.90) \times 10^{-6} \\
 C_{32} = (+ 0.20 \pm 0.20) \times 10^{-6} & S_{32} = (- 0.03 \pm 0.15) \times 10^{-6} \\
 C_{33} = (+ 0.072 \pm 0.135) \times 10^{-6} & S_{33} = (+ 0.211 \pm 0.128) \times 10^{-6} \\
 C_{41} = (- 0.16 \pm 0.52) \times 10^{-6} & S_{41} = (- 0.01 \pm 0.45) \times 10^{-6} \\
 C_{42} = (- 0.25 \pm 0.43) \times 10^{-6} & S_{42} = (- 0.05 \pm 0.32) \times 10^{-6} \\
 C_{43} = (+ 0.084 \pm 0.074) \times 10^{-6} & S_{43} = (- 0.006 \pm 0.032) \times 10^{-6} \\
 C_{44} = (+ 0.004 \pm 0.0012) \times 10^{-6} & S_{44} = (+ 0.011 \pm 0.015) \times 10^{-6}
 \end{array}$$

§ 4. *Perturbacje spowodowane przez ziemskie pole grawitacyjne*

Ponieważ siła przyciągania ziemskiego jest najważniejszą z sił działających na sztucznego satelitę, perturbacje wywołane polem grawitacyjnym Ziemi będą niewątpliwie największe, a kwestia ich jakościowej i ilościowej oceny będzie miała zasadnicze znaczenie w niniejszym temacie. Oceny tej dokonano używając metody całkowania numerycznego, wybierając przy tym orbitę, przy której perturbacje te będą największe. Obliczony został wpływ następujących wyrazów: C_{20} , C_{30} , C_{40} , C_{50} , C_{22} i S_{22} . W tym celu wyprowadzono wzory na równania ruchu sztucznego satelity. Wzory te podane były w nieco innej postaci, bez wyprowadzeń, w pracy Kocziny [1962]. W celu kontroli zostały one wyprowadzone przez autora niezależnie, wyprowadzenie to jest podane w pracy [Zieliński 1967].

Ponieważ interesują nas tylko perturbacje krótkookresowe i dobowe, całkowanie przeprowadzone zostało w interwale jednego okrążenia satelity w przypadku harmonik zonalnych i jednej doby dla harmonik tesseralnych.

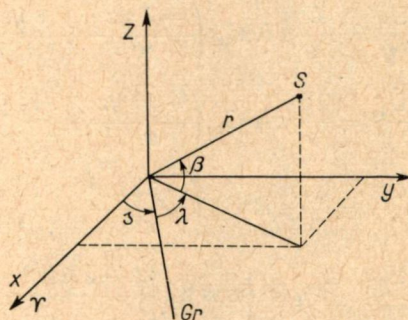
Równania różniczkowe ruchu satelity we współrzędnych prostokątnych mają postać

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\quad (4.1)$$

gdzie U — potencjał grawitacyjny określony wzorem (3.1). Jeżeli ograniczymy się do wyrazów, których wpływ chcemy tu badać, wzór ten możemy napisać następująco:

$$U = U_{00} + U_{20} + U_{22} + U_{30} + U_{40} + U_{50}. \quad (4.2)$$

Oczywiście każdą z pochodnych (4.1) możemy także przedstawić w postaci sumy pochodnych wyrazów U_{nm} . Po zróżniczkowaniu wzoru



Rys. 3. Nieruchomy układ współrzędnych

(4.2) i uwzględnieniu zależności między współrzędnymi w układzie nieruchomym xyz a szerokością, długością geograficzną i czasem gwiazdowym s

$$\begin{aligned}x &= r \cos \beta \sin (\lambda + s) \\ y &= r \cos \beta \cos (\lambda + s) \\ z &= r \sin \beta\end{aligned}\quad (4.3)$$

otrzymamy następujące wyrażenia na pochodne potencjału:

$$\frac{\partial U_{00}}{\partial x} = -\frac{\mu x}{r^3}$$

$$\frac{\partial U_{20}}{\partial x} = \frac{3}{2} \mu R^2 C_{20} \left(-\frac{5 x z^2}{r^7} + \frac{x}{r^5} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{30}}{\partial x} &= \frac{5}{2} \mu R^3 C_{30} \left(-\frac{7 x z^3}{r^9} + \frac{3 x z}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{40}}{\partial x} &= \frac{15}{8} \mu R^4 C_{40} \left(-\frac{21 x z^4}{r^{11}} + \frac{14 x z^2}{r^9} - \frac{x}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{50}}{\partial x} &= \frac{21}{8} \mu R^5 C_{50} \left(-\frac{33 x z^5}{r^{13}} + \frac{30 x z^3}{r^{11}} - \frac{5 x z}{r^9} \right) \\
 \frac{\partial U_{22}}{\partial x} &= 3 \mu R^2 \left\{ \cos 2s \left[\left(-\frac{5(x^2 - y^2)x}{r^7} + \frac{2x}{r^5} \right) C_{22} + \left(-\frac{10 x^2 y}{r^7} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{2y}{r^5} \right) S_{22} \right] + \sin 2s \left[\left(-\frac{10 x^2 y}{r^7} + \frac{2y}{r^5} \right) C_{22} - \left(-\frac{5(x^2 - y^2)x}{r^7} + \frac{2x}{r^5} \right) S_{22} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{00}}{\partial y} &= -\mu \frac{y}{r^3} \\
 \frac{\partial U_{20}}{\partial y} &= \frac{3}{2} \mu R^2 C_{20} \left(-\frac{5 y z^2}{r^7} + \frac{y}{r^5} \right) \\
 \frac{\partial U_{30}}{\partial y} &= \frac{5}{2} \mu R^3 C_{30} \left(-\frac{7 y z^3}{r^9} + \frac{3 y z}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{40}}{\partial y} &= \frac{15}{8} \mu R^4 C_{40} \left(-\frac{21 y z^4}{r^{11}} + \frac{14 y z^2}{r^9} - \frac{y}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{50}}{\partial y} &= \frac{21}{8} \mu R^5 C_{50} \left(-\frac{33 y z^5}{r^{13}} + \frac{30 y z^3}{r^{11}} - \frac{5 y z}{r^9} \right) \\
 \frac{\partial U_{22}}{\partial y} &= 3 \mu R^2 \left\{ \cos 2s \left[\left(-\frac{5 y(x^2 - y^2)}{r^7} - \frac{2y}{r^5} \right) C_{22} + \left(-\frac{10 x y^2}{r^7} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{2x}{r^5} \right) S_{22} \right] + \sin 2s \left[\left(-\frac{10 x y^2}{r^7} + \frac{2x}{r^5} \right) C_{22} - \left(-\frac{5 y(x^2 - y^2)}{r^7} - \frac{2y}{r^5} \right) S_{22} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{00}}{\partial z} &= -\mu \frac{z}{r^3} \\
 \frac{\partial U_{20}}{\partial z} &= \frac{3}{2} \mu R^2 C_{20} \left(\frac{3 z}{r^5} - \frac{5 z^3}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{30}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \mu R^3 C_{30} \left(-\frac{35 z^4}{r^9} + \frac{30 z^2}{r^7} - \frac{3}{r^5} \right) \\
 \frac{\partial U_{40}}{\partial z} &= \frac{5}{8} \mu R^4 C_{40} \left(-\frac{63 z^5}{r^{11}} + \frac{70 z^3}{r^9} - \frac{15 z}{r^7} \right) \\
 \frac{\partial U_{50}}{\partial z} &= \frac{3}{8} \mu R^5 C_{50} \left(-\frac{231 z^6}{r^{13}} + \frac{315 z^4}{r^{11}} - \frac{105 z^2}{r^9} + \frac{5}{r^7} \right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

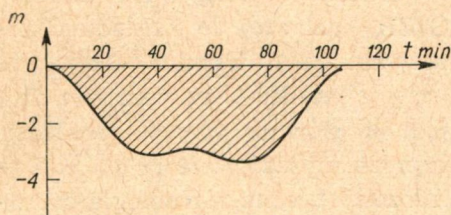
$$\frac{\partial U_{22}}{\partial z} = 3\mu R^2 \left\{ \cos 2s \left[\left(\frac{-5z(x^2 - y^2)}{r^7} \right) C_{22} + \left(\frac{-10xyz}{r^7} \right) S_{22} \right] + \right. \\ \left. + \sin 2s \left[\left(\frac{-10xyz}{r^7} \right) C_{22} - \left(\frac{-5z(x^2 - y^2)}{r^7} \right) S_{22} \right] \right\}$$

Całkowanie równań ruchu zostało wykonane metodą Runge-Kutty-Gilla, przy użyciu maszyny cyfrowej GIER, należącej do Zakładu Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego. W wyniku całkowania otrzymuje się współrzędne prostokątne x , y , z satelity w momencie s . Dla niniejszego tematu interesujący jest jednak głównie promień wodzący i jego zmiany wywołane obecnością kolejnych wyrazów wzoru na potencjał. W związku z tym program został ułożony tak, że równolegle całkowane były zawsze dwa zestawy równań różniące się bądź ilością uwzględnionych wyrazów, bądź wartościami liczbowymi współczynników C_{nm} , S_{nm} . Otrzymywano w ten sposób dwie długości promienia wodzącego w tym samym momencie (obliczone jako $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), ich różnica stanowiła perturbację w promieniu wodzącym spowodowaną przez wyraz, o który różniły się dwa zestawy równań.

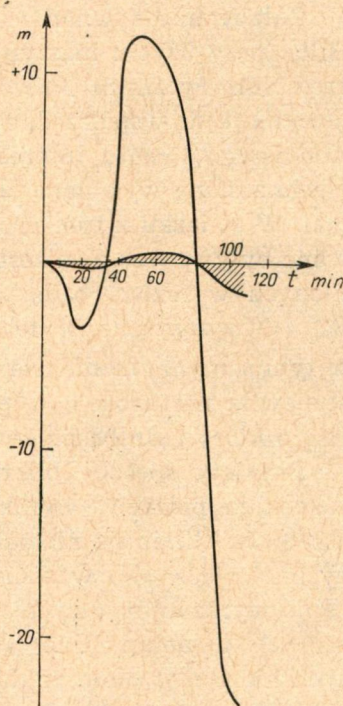
Przyjęty sposób obliczeń i wyprowadzania wyników, poza tym że zaspokaja potrzeby wynikające z postawionego zadania, ma tę ważną zaletę, że eliminuje niemal całkowicie wpływ błędów całkowania, mających swoje źródło w samej zasadzie całkowania numerycznego: odrzucanie wyrazów wyższych rzędów, liczenie ze skończoną ilością cyfr znaczących i zaokrąglanie, stosowane w każdym kroku iteracji. Błędów tych nie można obliczyć dokładnie, można jednak oszacować ich wielkość i sposób narastania. Ocenia się, że błąd jest proporcjonalny do ilości kroków w potęgze $3/2$ [Ziółkowski 1964], jednocześnie ma on przebieg oscylacyjny, narastający szybko tam, gdzie funkcja zmienia się szybko i powoli tam, gdzie zmiany funkcji są powolne. Ponieważ długość promienia wodzącego w przypadku orbity kołowej zmienia się nieznacznie, błąd całkowania będzie również narastał powoli. Jeżeli jednak utworzymy różnicę dwóch promieni, otrzymanych przez całkowanie bardzo zbliżonych równań, różnica ta będzie prawie całkowicie wolna od błędu całkowania, w granicach potrzebnej tu liczby kroków (maks. 1440). Krok całkowania przyjęto równy jednej minucie gwiazdowej, co odpowiada ok. 1/100 okresu obiegu.

Do obliczeń przyjęto orbitę Alouette z czerwca 1963: $i = 80^\circ,5$, $e = 0,0025$, $P = 105^m,4$, $a = 7,392$ mgm co odpowiada $H_p = 996$ km. Jest to najniższa orbita w ramach przyjętych ograniczeń, a więc perturbacje spowodowane polem grawitacyjnym Ziemi będą tu największe. Ponieważ orientacja orbity w przestrzeni, wyjąwszy i , nie odgrywa tu roli, dla uproszczenia rachunku przyjęto: $\Omega = 0$, $\omega = 0$, $M_0 = 0$. Również dla uproszczenia i skrócenia obliczeń przyjęto za jednostkę długości pro-

mień równikowy Ziemi $R = 6,378165$ m. W ten sposób uniknięto podnoszenia do wysokiej potęgi R występującego w równaniach. Przyjęcie jednostki czasu $= 1$ min* również pozwoliło uniknąć pewnej ilości działań. W związku z tym stała μ oraz współrzędne i prędkości początkowe przyjęły wartości:



Rys. 4. Wpływ błędu wyrazu C_{20}
 $\Delta C_{20} = 5 \cdot 10^{-7}$



Rys. 5. Wpływ wyrazu $C_{30} = 245 \cdot 10^{-8}$ i jego błędu
 $\Delta C_{30} = 15 \cdot 10^{-8}$

$$\mu = 0,0055002277 \text{ R}^3/\text{min}^2$$

$$X_0 = 1,15594871 \text{ R}$$

$$Y_0 = 0$$

$$Z_0 = 0$$

$$VX_0 = 0$$

$$VY_0 = 0,0113991512 \text{ R}/\text{min}^*$$

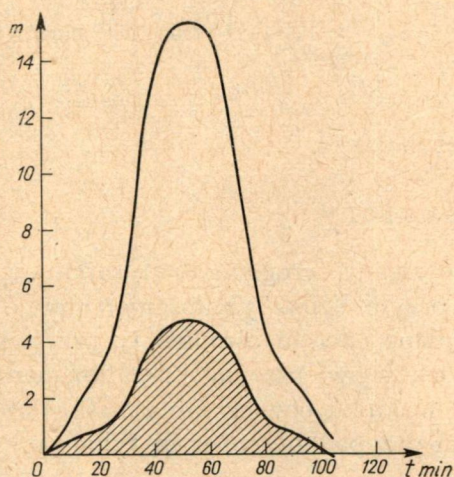
$$VZ_0 = 0,0681186354 \text{ R}/\text{min}^*$$

Przeliczenie z powrotem na metry odbywało się tuż przed wyprowadzeniem wyników.

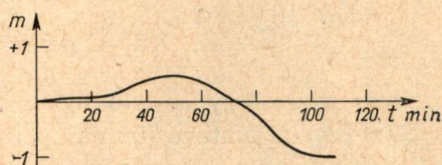
We wszystkich wariantach uczestniczą wyrazy 00 i 20. W wariantcie nr 1 badany jest wpływ współczynnika C_{20} wynoszącego $\Delta C_{20} = 5 \cdot 10^{-7}$, w obydwu układach występuje więc ten sam wyraz U_{00} i dwie wartości na C_{20} . W wariantcie drugim obliczamy wpływ wyrazu C_{30} , wynoszącego $+254 \cdot 10^{-8}$, a więc po raz pierwszy r jest obliczane z udziałem wyrazów U_{00} i U_{20} , po raz drugi z udziałem wyrazów U_{00} , U_{20} i U_{30} . W podobny sposób obliczone są:

- w wariancie 3 — wpływ błędu wyrazu $C_{30}\Delta C_{30} = 15 \cdot 10^{-8}$,
 4 — wpływ wyrazu $C_{40} = +16 \cdot 10^{-7}$,
 5 — wpływ błędu $\Delta C_{40} = 5 \cdot 10^{-7}$,
 6 — wpływ wyrazu $C_{50} = +15 \cdot 10^{-8}$,
 7 — wpływ wyrazów $C_{22} = +115 \cdot 10^{-8}$ i $S_{22} = 125 \cdot 10^{-8}$,
 8 — wpływ błędów wyrazów C_{22} i S_{22} wynoszących
 $\Delta C_{22} = 70 \cdot 10^{-8}$, $\Delta S_{22} = 100 \cdot 10^{-8}$.

Wyniki obliczeń przedstawione są na wykresach (rys. 4, 5, 6, 7, 8), skala rysunków opisana w metrach na osi pionowej i w minutach gwiazdowych na osi poziomej.



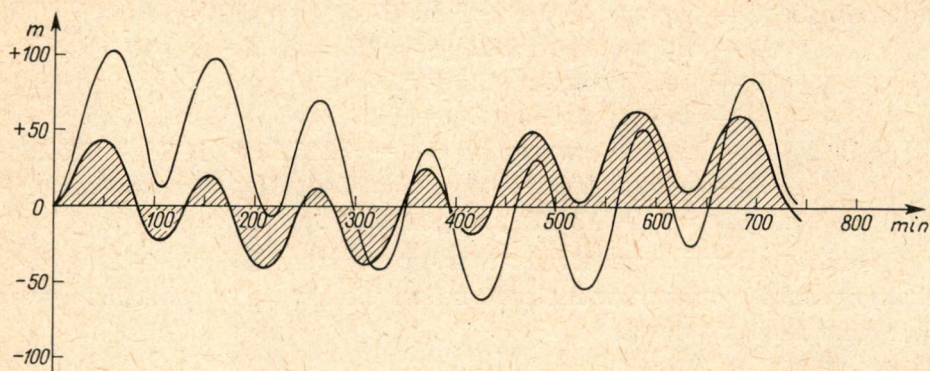
Rys. 6. Wpływ wyrazu $C_{40} = +16 \cdot 10^{-7}$ i jego błędu $\Delta C_{40} = 5 \cdot 10^{-7}$



Rys. 7. Wpływ wyrazu $C_{50} = +15 \cdot 10^{-8}$

Z otrzymanych wyników wypływają następujące wnioski: okazuje się, że dokładność, z jaką znamy współczynniki harmonik zonalnych pozwoliłyby na obliczenie promienia wodzącego z dokł. 10^{-6} . W tym celu należałoby uwzględnić wyrazy aż do C_{40} , przy czym dokładności, z jakimi są one znane są wystarczające. Jeśli chodzi o perturbacje wywołane harmonikami C_{22} , S_{22} , to przekraczają one 100 m, nie ulega więc wątpliwości, że powinny być uwzględniane. Jednocześnie jednak dokładność tych współczynników, określona zgodnie z zasadą przyjętą w poprzednim paragrafie, nie pozwoli na obliczenie promienia wodzącego z błędem mniejszym niż 70 m, co daje dokładność względną 10^{-5} .

Niewątpliwie byłoby również interesujące zbadanie wpływu dalszych harmonik tesseralnych trzeciego i czwartego rzędu i autor ma nadzieję pracę tę kontynuować. Można jednak przewidzieć, że wpływ ten będzie, jeżeli nie mniejszy, to najwyżej tego samego rzędu dla orbit podobnych do użytej tutaj i zmniejszający się szybko wraz z wzrostem wysokości orbity.

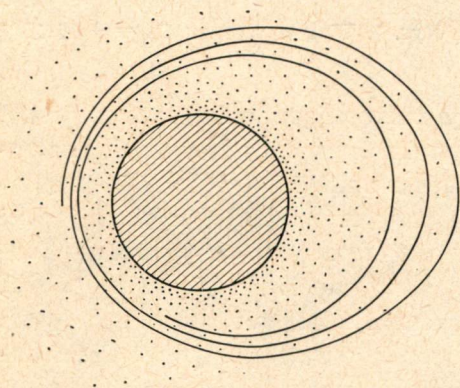


Rys. 8. Wpływ wyrazów $C_{22} = +115 \cdot 10^{-8}$ i $S_{22} = -125 \cdot 10^{-8}$ oraz ich błędów $\Delta C_{22} = 70 \cdot 10^{-8}$ i $\Delta S_{22} = 100 \cdot 10^{-8}$

§ 5. Inne perturbacje

a) Opór atmosfery

Opór atmosfery śmiało może być nazwany wrogiem nr 1 satelitów geodezyjnych. Dlatego już na początku przyjęte zostały założenia zmniejszające do minimum perturbacje wywołane oporem ośrodka, tj. przyjęliśmy orbitę zbliżoną do kołowej o wysokości większej niż 1000 km nad powierzchnią Ziemi i satelitę o małym stosunku powierzchnia/masa. Ponadto przypomnieć trzeba, że w naszym przypadku groźne są tylko per-



Rys. 9. Schemat zmian orbity pod wpływem oporu atmosfery

turbacje krótkookresowe i dobowe, gdyż te nie znajdują odbicia w zmianach elementów średnich, które mogą być wyznaczone z obserwacji. Dokonana została tu ocena, jaki może być rząd wielkości tych perturbacji, czy można je uznać za zanedbywalnie małe.

Przypomnimy pokrótce mechanizm powstawania perturbacji spowodowanych oporem atmosfery. Wyobraźmy sobie najpierw, że atmosfera pozostaje nieruchoma względem płaszczyzny orbity, której mimośród $\neq 0$.

Satelita, poruszając się w ośrodku stawiającym opór wytraca część swojej energii kinetycznej, a zatem zmniejsza prędkość. Ponieważ największe hamowanie ma miejsce w pobliżu perigeum, tam też zmienia się najbardziej prędkość, co powoduje zmianę rozmiarów i kształtu orbity w każdym następnym okrążeniu. Odległość perigeum będzie przy tym zmieniała się znacznie wolniej niż odległość apogeum. Będziemy więc mieli zmiany wiekowe dwóch elementów: półosi a i co za tym idzie okresu P i ruchu średniego n , a także mimośrod e . Jednakże, oprócz tych zmian wiekowych prowadzących do przybrania przez orbitę kształtu kołowego i obniżających wysokość lotu, trzeba się spodziewać zmian krótkookresowych, ponieważ w każdym punkcie orbity siła hamująca ma inną wartość i można ją uważać za funkcję położenia satelity, a więc czasu. Tylko w przypadku orbity kołowej i atmosfery, która miałaby budowę sferoidalną uniknęlibyśmy wyrazów okresowych w perturbacjach elementów. Niestety struktura atmosfery jest dość daleka od idealnej struktury sferoidalnej. Jak wykazały badania za pomocą obserwacji sztucznych satelitów, atmosfera ma kształt raczej jajowaty, spowodowany różnicą temperatur strony dziennej i nocnej globu ziemskiego. Oś wybrzuszenia tworzy kąt ok. 30° w rektascenzji z kierunkiem Ziemia-Słońce i jest skierowana na wschód od niego. Ponadto na skutek obrotu dookoła osi zaznacza się spłaszczenie atmosfery. To wszystko powoduje, że nawet satelita znajdujący się na orbicie kołowej porusza się w ośrodku, którego gęstość jest funkcją miejsca, a więc mogą wystąpić perturbacje krótkookresowe.

Do zbadania tego zjawiska skorzystano z wzorów podanych przez Proskurina i Batrakowa [1959]:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2 \alpha \varrho n a^2}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + 2 e \cos v + e^2)^{3/2}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{2 \alpha \varrho n a}{(1 - e^2)^{1/2}} (1 + 2 e \cos v + e^2)^{1/2} (e + \cos v),$$
(5.1)

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{2} C_x \frac{S}{m}$$

ϱ — gęstość atmosfery,

C_x — współczynnik aerodynamiczny, który dla tego typu ruchu wynosi 2,

S — powierzchnia przekroju poprzecznego satelity,

m — masa satelity.

W celu otrzymania liczbowych wartości zmian wielkiej półosi i mimośrodu przyjęto elementy orbity kołowej, położonej w płaszczyźnie równika, o promieniu 7378 km. Spodziewając się niewielkich perturbacji,

można sobie było pozwolić na tak daleko idące uproszczenia. Kształt i rozmiary satelity przyjęto taki jaki posiada Alouette, tj. $S = 0,735 \text{ m}^2$, $m = 145 \text{ kg}$. Dla obliczenia gęstości atmosfery ρ przyjęto model zaproponowany przez Martina, Nevelinga, Priestera i Roemera [1961]. Jest to model oparty na obserwacjach sztucznych satelitów, uwzględniający wybrzuszenie dzienne, dla średniego poziomu aktywności Słońca. Po podstawieniu do wzorów (5.1) powyższych danych i wykonaniu uproszczonego całkowania (poprzez sumowanie) otrzymano zmiany zestawione w tabelicy 2.

Widać z niej, że poszukiwane perturbacje są znikome. Perturbacja wiekowa dużej półosi wynosi kilka centymetrów na jeden obieg i zmiany okresowe są zupełnie zaniedbywalne. Podobnie rzecz się ma z mimośro-

Tabela 2

$\Delta\alpha$	Δt sek	Δa (cm)	Δe
180	263	-0.07	-1×10^{-10}
210	526	-0.18	-2
240	438	-0.25	-3
260	263	-0.29	-3
270	350	-0.34	-3
300	526	-0.57	-1
330	525	-1.38	+8
0	526	-3.03	+31
30	525	-4.98	+54
60	526	-6.56	+64
90	525	-7.36	+64
120	526	-7.71	+62
150	525	-7.89	+60
180	263	-7.96	+59
$P = 6307$			

dem, gdzie zmiany pojawiają się na dziewiątym miejscu po przecinku. Upoważnia to do stwierdzenia, że w niniejszym temacie, przy tak dobranych warunkach orbitalnych i aerodynamicznych, krótkookresowe i dobowe perturbacje spowodowane oporem atmosfery nie mają żadnego wpływu.

b) Wpływ przyciągania Słońca i Księżyca

Wpływy Słońca i Księżyca na ruch sztucznego satelity różnią się od siebie tylko ilościowo, jakościowo są takie same. Można je ocenić korzystając ze znanego w mechanice nieba wzoru na funkcję perturbacyjną ciała zewnętrznego:

$$R = \mu' \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r'^3} \right), \quad (5.2)$$

gdzie

μ' — masa ciała perturbującego razy stała grawitacyjna,

$\bar{r}$ — promień wodzący satelity,

$\bar{r}'$ — promień wodzący ciała perturbującego.

Podstawiając odpowiednie dane dla Słońca i Księżyca oraz orbitę satelity o promieniu 9500 km, dochodzimy do wniosku, że perturbacje krótkookresowe będą w przypadku pierwszym pięć razy, a w drugim dwa i pół raza mniejsze niż wpływ błędu hamoniki C_{20} , badanego w wariancie 1. Można zatem stwierdzić, że uwzględnienie wpływu przyciągania Słońca i Księżyca nie jest potrzebne.

c) Wpływ ciśnienia światła

Wpływu ciśnienia światła nie trzeba by wcale rozważać, gdyby satelita poruszając się na orbicie znajdował się cały czas w promieniach Słońca. Siła wywierana przez ciśnienie światła byłaby wówczas stała i mogłaby powodować tylko zmiany wiekowe orbity. Trzeba jednak wziąć pod uwagę, że na ogół część orbity znajduje się w obszarze cienia Ziemi i wtedy czynnik ten przestaje działać, a więc wielkość dodatkowego przyspieszenia staje się zależna od położenia satelity na orbicie. Dla oceny perturbacji krótkookresowych powodowanych przez tę okoliczność posłużono się metodą zastosowaną przez Wyatta [1963], w której porównuje się wpływ ciśnienia światła z wpływem atmosfery.

Przyspieszenie powodowane ciśnieniem światła wyraża się wzorem:

$$F_L = p \cdot \frac{S}{m}, \quad (5.3)$$

gdzie p — ciśnienie światła słonecznego w odległości jednostki astronomicznej, wywierane na ciało doskonale odbijające.

Przyspieszenie powodowane oporem atmosfery możemy wyrazić

$$F_A = -\frac{1}{2} C_x \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \frac{S}{m}, \quad (5.4)$$

gdzie v — prędkość satelity.

Stosunek tych dwóch wielkości będzie niezależny od charakterystyk satelity. Podstawiając odpowiednie liczby otrzymamy:

$\left| \frac{F_L}{F_A} \right| = +2,5$ dla wysokości 1000 km nad Ziemią. Jednakże w p. a) wykazano, że wpływ atmosfery w rejonie maksymalnej gęstości może dawać perturbacje rzędu pojedynczych centymetrów. Wobec tego nawet dziesięciokrotnie silniejszy wpływ będzie dawał zakłócenia mniejsze od jednego metra, a więc poniżej granicy, od której warto jest je uwzględnić.

Innych źródeł zakłóceń, takich jak wpływ ziemskiego pola magnetycznego, wpływ pola elektrostatycznego istniejącego w jonosferze, wpływ promieniowania odbitego od Ziemi czy efekt relatywistycznych, nie będziemy rozważać z uwagi na nieznaczność powodowanych efektów.

§ 6. Zastosowanie teorii promienia wodzącego

Z wywodów zawartych w poprzednich rozdziałach wynika wniosek, że można obecnie obliczać promień wodzący satelity z dokładnością rzędu 10^{-5} . Bariere stanowi dokładność, z jaką znamy współczynniki harmonik tesseralnych. Jeśli jednak porównamy obecny stan wiedzy o ziemskim polu grawitacyjnym ze stanem sprzed kilku lat, dojdziemy do wniosku, że jeżeli tempo zostanie utrzymane, to wkrótce i te brakujące parametry będziemy znali wystarczająco dokładnie, aby zapewnić dokładność promienia wodzącego 10^{-6} . Zastanówmy się teraz, w jaki sposób można wykorzystać ten osobliwy przymiar długości do pomiarów globu ziemskiego. Przedstawiamy tu kilka sposobów w kolejności zgodnej z chronologią ich powstawania, które zapewne nie wyczerpują wszystkich możliwości.

a) Wyznaczenie promienia równoleżnikowego Ziemi

Celem tej metody jest wyznaczenie odległości od obserwatora do osi obrotu Ziemi, czyli inaczej mówiąc promienia równoleżnikowego. Jeżeli z punktu P zaobserwujemy satelitę S dwukrotnie w czasie jego dwóch kolejnych przejść przez koło wielkie równika topocentrycznego, otrzymamy sytuację jak na rysunku 10: koło przedstawia równoleżnik miejsca obserwacji, a ściślej okrąg zakreślony miejscem obserwacji. Po wykonaniu jednego pełnego obiegu satelita znajdzie się prawie w tym samym miejscu w przestrzeni (pomijając ruch postępowy Ziemi), co poprzednio. Ziemia w tym czasie dokona obrotu o kąt σ równy drakonicznemu okresowi P , który to kąt wyznaczymy z obserwacji. Kąty OP_1S i SP_2O również możemy wyznaczyć drogą obserwacji. Jeżeli będziemy znali długość f , będziemy mogli rozwiązać bez trudu czworobok P_1SP_2O i obliczyć promień R . Oczywiście, konieczne będzie wprowadzenie poprawki o przesunięcie się punktu S na skutek ruchu węzłów orbity. Element f obliczymy ze wzoru:

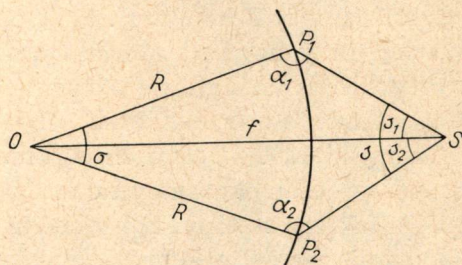
$$f = r \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u \cdot \sin^2 i}, \quad (6.1)$$

gdzie

- r — promień wodzący,
- u — argument szerokości,
- i — nachylenie.

Warunek dwóch kolejnych przejść można rozszerzyć na większą ich liczbę, po których satelita będzie obserwowany po raz drugi, jeśli tylko zdołamy zapewnić odpowiednią dokładność obliczenia poprawki $\Delta\Omega$ niezbędnej do poprawienia położenia punktu S w drugiej obserwacji oraz stałość — w granicach tolerancji — przekątnej f . Analiza wykazuje [Zieliński 1967], że przy zachowaniu podanych na wstępie warunków dotyczących orbity i formy satelity jest to w pełni możliwe.

Ograniczeniem odnoszącym się do tej metody jest konieczność znajomości geocentrycznej długości geograficznej miejsca obserwacji. Trzeba

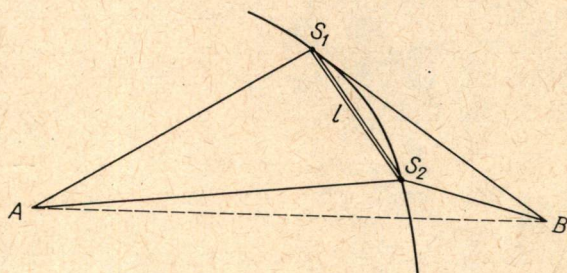


Rys. 10. Wyznaczenie promienia równoleżnika

więc mieć dane współrzędne geodezyjne w jednym z nowszych układów (np. Hayford, Krasowski), które trzeba jeszcze zredukować do położenia bieguna chwilowego. Przypadek, kiedy znane są tylko współrzędne wyznaczone astronomicznie, omówiony jest dalej.

b) Obliczenie triangulacji kosmicznej sposobem czworościanów

Jeżeli z punktu A zaobserwujemy satelitę w dwóch położeniach S_1 i S_2 odpowiadającym dwom momentom T_1 i T_2 , otrzymamy kierunki AS_1 , AS_2 , BS_1 , BS_2 w układzie, którego oś pokrywa się z osią obrotu Ziemi, a płasz-



Rys. 11. Metoda czworościanu

czyzna XY z płaszczyzną równika. Jeżeli na podstawie znajomości elementów orbity obliczymy długość odcinka prostej S_1S_2 , będziemy mogli łatwo rozwiązać czworościan ABS_1S_2 i obliczyć długość i kierunek AB .

Przyjmując dowolnie współrzędne punktu A będziemy mogli obliczyć współrzędne punktu B , a dalej w ten sam sposób współrzędne wszystkich punktów sieci. Punkty obliczonej w ten sposób sieci, poddanej następnie wyrównaniu, otrzymają współrzędne w układzie zorientowanym absolutnie z jednostką długości niezależną od pomiarów długościowych wykonanych na powierzchni Ziemi, a zatem uwolnionej od błędów pomiaru baz, błędów redukcji z geoidy na elipsoidę itp. Znika także źródło błędów, jakim jest przenoszenie długości z boku mierzonego na boki niemierzone, gdyż ilość „baz” będzie znacznie przewyższać ilość boków.

Dzięki uczestnictwu Polski w międzynarodowym programie obserwacji satelity Echo 1 w r. 1963, powstała możliwość sprawdzenia tej koncepcji przy użyciu materiału obserwacyjnego. W tym celu zostały przeprowadzone analityczne wzory na długość odcinka bazowego S_1S_2 w funkcji elementów orbity, oraz przeprowadzona została analiza dokładności [Zieliński 1965]. Celem eksperymentu było stwierdzenie poprawności tej analizy: jeżeli okazałaby się ona słuszna dla Echo 1, to powinna być dobra i dla takiego satelity, który spełni wszystkie wymagania orbitalne i aerodynamiczne i który będzie w stanie zapewnić wyniki znacznie dokładniejsze niż balon Echo.

Wyniki obliczeń w pełni potwierdziły rezultaty analizy teoretycznej. Zostały one opublikowane na Sympozjum Wykorzystania Obserwacji Sztucznych Satelitów w Krakowie (kwiecień 1965 [Pachelski, Zieliński 1966]). Potwierdzone zostały również w ten sposób zasadnicze założenia teorii promienia wodzącego.

c) Dowiązanie sieci triangulacyjnej do środka mas Ziemi

Opisana wyżej metoda pozwala wyznaczyć współrzędne wszystkich punktów w układzie o ściśle określonych kierunkach osi, ale o dowolnie przyjętym początku.

Ponieważ jednak wyznaczyliśmy współrzędne punktów A i B , możemy obliczyć również współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków czworościanu S_1 i S_2 . Znając długość promienia wodzącego w tym punkcie możemy napisać:

$$\left. \begin{aligned} (X_{S_1} - X_0)^2 + (Y_{S_1} - Y_0)^2 + (Z_{S_1} - Z_0)^2 &= r_1^2, \\ (X_{S_2} - X_0)^2 + (Y_{S_2} - Y_0)^2 + (Z_{S_2} - Z_0)^2 &= r_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

gdzie X_0, Y_0, Z_0 — współrzędne środka mas.

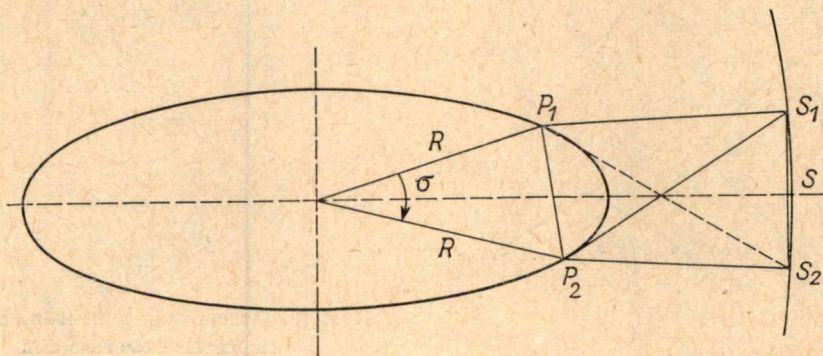
Takich układów równań możemy napisać tyle, ile było utworzonych czworościanów w sieci i w ten sposób znaleźć współrzędne X_0, Y_0, Z_0 w przyjętym układzie. Po wykonaniu równoległego przesunięcia otrzymamy układ współrzędnych o początku w środku mas Ziemi.

W ostatnich latach powstało kilka projektów światowej sieci triangulacyjnej. Jednym z najbardziej eleganckich i jednocześnie najbardziej konkretnych jest projekt Żongołowicza [1965]. Projekt ten posiada pewne ograniczenia nałożone świadomie przez autora, który uważa pewne trudności za możliwe do rozwiązania dopiero w przyszłości. Taką trudnością jest nadanie przestrzennej sieci skali długościowej. Żongołowicz proponuje zastosowanie lasera do pomiaru jednego z odcinków satelita — stacja obserwacyjna, zastrzegając się, że będzie to możliwe w przyszłości i zwracając uwagę na cały szereg trudności technicznych z tym związanych. Zastosowanie metody opisanej w niniejszej pracy usuwa ten kłopot i pozwala jednocześnie uzyskać wielką ilość spostrzeżeń nadliczbowych w postaci pomierzonych długości.

Drugą sprawą, którą autor projektu światowej sieci triangulacji pozostawia nierozwiązaną, jest nawiązanie sieci do środka mas, jakkolwiek stwierdza na wstępie, że taki jest właśnie cel ostateczny wszystkich tego rodzaju prac. Metoda zastosowania promienia wodzącego pozwala uzupełnić i tę część projektu.

d) Wyznaczenie promienia równoleżnikowego przy zastosowaniu metody czworościanu

W punkcie a) omawiana była metoda wyznaczania promienia równoleżnikowego, w której konieczna była dokładna znajomość długości geocentrycznej miejsca obserwacji. Można jednak dobrać taki sposób postępowania, że warunek ten nie będzie obowiązywał. Dwukrotne celowanie



Rys. 12. Wyznaczenie promienia równoleżnikowego z zastosowaniem czworościanu

na punkt S , który faktycznie przemieszcza się, a tylko dzięki wprowadzeniu odpowiednich poprawek do rachunku uważany jest za nieruchomy, można nazwać *quasi-synchronicznym*. Taką samą quasi-synchroniczność zastosować można do obserwacji innych punktów wybranych, np. punktów odległych w czasie o interwał $\pm \Delta t$ od punktu S .

A zatem jesteśmy w stanie skonstruować czworościan, zupełnie analogiczny do stosowanego w triangulacji z tym, że miejsce poprzednich dwóch punktów A i B zajmie jeden punkt P , który w czasie dzielącym dwie obserwacje zmienił swoje miejsce w przestrzeni. Otrzymamy w wyniku długość P_1P_2 , skąd bezpośrednio wyznaczyć możemy R :

$$R = \frac{P_1P_2}{2} \cdot \operatorname{cosec} \sigma/2. \quad (6.3)$$

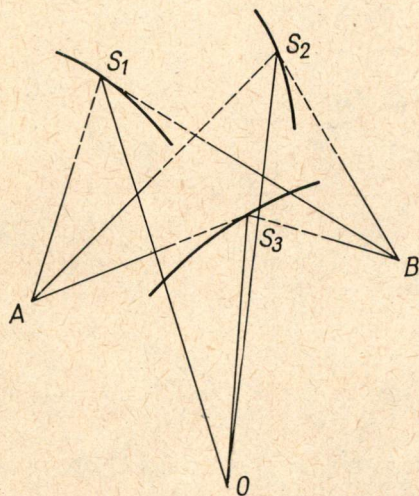
Teraz możemy pokusić się o wyznaczenie elementu, być może jeszcze bardziej interesującego niż R , a mianowicie składowej równoleżnikowej odchylenia pionu. Odpowiedni wzór ma postać:

$$\eta = \frac{-\Delta R \cdot \sin^4 \alpha_1 \sin s}{f [\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 s_1 + \sin s_1 \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 \sin s]} \quad (6.4)$$

ΔR — będzie to różnica między promieniem wyznaczonym sposobem opisanym w punkcie a) a promieniem wyznaczonym z wzoru (6.3).

e) Obserwacje synchroniczne nie tworzące czworościanów

Dwie ostatnie metody, które będą tu przedstawione, są najbardziej skomplikowane pod względem analitycznym, ale za to dają możliwość wykorzystania istniejącego materiału obserwacyjnego i innych obserwacji robionych w przyszłości w sposób standartowy.



Rys. 13. Obserwacje synchroniczne nie tworzące czworościanu

Wyobraźmy sobie, że z dwóch punktów A i B wykonywane są obserwacje satelity lub satelitów w punktach S_1 , S_2 , S_3 . Każda z tych obserwacji pozwoli na ułożenie następującego układu równań:

$$\frac{y_{si} - y_A}{x_{si} - x_A} = \operatorname{tg} t_{Ai}; \quad \frac{y_{si} - y_B}{x_{si} - x_B} = \operatorname{tg} t_{Bi};$$

$$\frac{z_{si} - z_A}{\sqrt{(x_{si} - x_A)^2 + (y_{si} - y_A)^2}} = \operatorname{tg} \delta_{Ai}; \quad \frac{z_{si} - z_B}{\sqrt{(x_{si} - x_B)^2 + (y_{si} - y_B)^2}} = \operatorname{tg} \delta_{Bi}; \quad (6.5)$$

$$x_{si}^2 + y_{si}^2 + z_{si}^2 = r_i^2,$$

gdzie: x_{si}, y_{si}, z_{si} — współrzędne satelity w momencie i -tej obserwacji,

$x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$ — współrzędne stacji,

t_{Ai}, t_{Bi} — kąty godzinne odniesione do Greenwich obserwowane ze stacji A i B ,

δ_{Ai}, δ_{Bi} — deklinacje obserwowane z A i B .

Trzy obserwacje utworzą układ 15 równań z 15 niewiadomymi. Rozwiązanie takiego układu nie jest sprawą prostą, ale też nie beznadziejną. Ponieważ zawsze znane są z dość dobrym przybliżeniem współrzędne punktów A i B , a z nieco gorszym możemy obliczyć współrzędne punktów S_1, S_2, S_3 , zastosować można numeryczną metodę iteracji bez obawy, że proces okaże się rozbieżny.

Dokładność takiego wyznaczenia będzie zależała — poza dokładnością obserwacji i dokładnością promieni wodzących — od konfiguracji geometrycznej.

Najkorzystniejsze warunki będą wtedy, kiedy kierunki w punktach A i B będą tworzyły ze sobą kąty zbliżone do prostych, czyli punkty S_1, S_2, S_3 powinny być możliwie szeroko rozstawione. Wynika stąd, że odległość między stacjami nie powinna być większa niż wysokość satelity nad Ziemią, gdyż w przeciwnym wypadku nie da się osiągnąć korzystnej konfiguracji.

f) Obserwacje niesynchroniczne

Przypuśćmy, że na danej stacji A wykonane są obserwacje w ten sposób, że w czasie jednego przelotu zaobserwowano satelitę w dwóch lub więcej miejscach na niebie, w odstępach kilkuminutowych. Pozwala to obliczyć długość odcinków l w przestrzeni, analogicznych do odcinków bazowych występujących w metodzie czworościanów. Weźmy pod uwagę trzy takie obserwacje. Każda z nich pozwala na ułożenie układu równań:

$$\frac{y_1 - y_A}{x_1 - x_A} = \operatorname{tg} t_1; \quad \frac{y_2 - y_A}{x_2 - x_A} = \operatorname{tg} t_2;$$

$$\frac{x_1 - x_A}{\sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}} = \operatorname{tg} \delta_1; \quad \frac{x_2 - x_A}{\sqrt{(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2}} = \operatorname{tg} \delta_2; \quad (6.6)$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l_{12}^2;$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = r_2^2$$

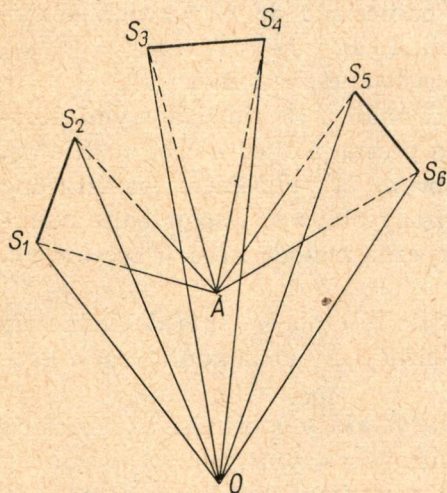
gdzie:

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — współrzędne punktów S_1 i S_2 ,

x_A, y_A, z_A — współrzędne miejsca obserwacji,

$t_1, t_2, \delta_1, \delta_2$ — obserwowane kąty godzinne i deklinacje.

Trzy obserwacje dają nam układ 21 równań z 21 niewiadomymi. Sprawa rozwiązania tego układu przedstawia się podobnie jak w przypadku poprzednim. Dzięki temu, że znamy przybliżone współrzędne wszystkich punktów, jesteśmy w stanie rozwiązać ten układ metodą iteracji całkowicie jednoznacznie, mimo że istnieje tu więcej rozwiązań rzeczywistych.



Rys. 14 Obserwacje niesynchroniczne

Jak zawsze dokładność silnie zależy od konfiguracji i dla dobrego wyznaczenia punktu A potrzebne jest dobre rozmieszczenie obserwowanych punktów S_i .

*

W zakończeniu autor pragnie podziękować wszystkim, którzy służyli mu radą i pomocą w czasie pracy nad powyższym zagadnieniem: profesorowi W. Opalskiemu za szereg bardzo cennych uwag i spostrzeżeń, doktorowi L. Cichowiczowi — dzięki inicjatywie i pomocy którego możliwe było podjęcie nowatorskich tematów, magistrom W. Pachelskiemu i K. Ziółkowskiemu z Centrum Obliczeniowego PAN, którzy dzielili się chętnie swoim doświadczeniem w dziedzinie obliczania orbit, całkowania numerycznego i programowania oraz personelowi Zakładu Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego, w którym zostały wykonane rachunki.

Czytelnikowi, który interesowałby się bliżej wyprowadzeniami wzorów, szczegółami przeprowadzonych analiz lub napisanymi w ALGOLu programami obliczeń, proponujemy zapoznanie się z cytowaną kilkakrotnie w tekście pracą autora „The problem of application of the satellite radius-vector as a length measure for geodetic purposes” [Zieliński 1967].

LITERATURA

- Brouwer Dirk, Clemence Gerald M., *Methods of Celestial Mechanics*, Acad. Press 1961.
- Fischer Irene, Parallax of the Moon in terms of a World Geodetic System. *The Astron. Journal* 1962 67 Nr 6.
- Kaula W. M., A geoid and world geodetic system based on a combination of gravimetric, astrogeodetic and satellite data. *J. Geophys. Res.* 1961 66 Nr 6.
- Kaula W. M., Tesseral harmonics of the gravitational field and geodetic datum shifts derived from camera observations of satellites. *J. Geophys. Res.* 1963 a 68 Nr 2.
- Kaula W. M., Improved geodetic results from camera observations of satellites. *J. Geophys. Res.* 1963 b 68 Nr 18.
- Kaula W. M., A review of geodetic parameters. *NASA Techn. Note D-1847* 1963 c.
- Kaula W. M., Determination of the Earth's gravitational field. *Review of Geophysics* 1963 d Nr 4.
- Martin H. A., Neveling W., Priester W., Roemer M., Model of the upper atmosphere from 130 through 1600 km derived from satellite orbits. *Space Research* II, 1961.
- O'Keefe J. A., Anderson J. P., The Earth's equatorial radius and distance of the Moon. *The Astron. Journal* 1952 57 Nr 4.
- Pachelski W., Zieliński J. B., The results of an application of the tetrahedron method to observation of Echo 1. *Artificial Satellites* 1966 2 Nr 1.
- Uotila U. A., Harmonic analysis of world-wide gravity material. *Publ. Isos. Inst. Intern. Assoc. Geod.* 1962 Nr 39.
- Wyatt S. P., The effect of radiation pressure on the secular acceleration of satellites. *Smiths. Contrib. Astroph.* 1963 6.
- Zieliński J. B., New methods and results of research on the problem of the Earth's figure. *Zeszyty Naukowe Polit. Warsz. Geodezja* 1963 Nr 10.
- Zieliński J. B., The problem of applying the satellite radius-vector as a length measure for geodetic purposes *Zeszyty Nauk. Polit. Warsz. Geodezja* 1967.
- Zieliński J. B., Zasada obliczenia triangulacji przestrzennej wykonanej za pomocą obserwacji synchronicznych, na podstawie częściowej znajomości elementów orbity. *Biuletyn Polskich Obserwacji Sztucznych Satelitów* 1965 Nr 13.
- Ziółkowski K., Ocena błędu całkowania metodą Cowella równań mechaniki niebios. *Postępy Astronomii* 1964 Nr 2.
- Жонголович И. Д., Проект единой мировой космической триангуляции. *Studia geophys. et geod.* 1965 9.
- Кочина Н. Г., Влияние гравитационных аномалии Земли на движение искусственных спутников. *Труды И.Т.А.* Nr. 9 1962.
- Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В., О возмущениях орбит искусственных спутников, вызываемых сопротивлением воздуха. *Иск. Спутники Земли* 1959 Nr. 3.
- Сочилина Г. А., Улучшение орбитальных элементов искусственных спутников Земли. *Бюл. И.Т.А.* 1963 9 Nr. 5.

ЯНУШ Б. ЗЕЛИНСКИ

**Применение радиуса-вектора искусственного спутника Земли
как меры длины в геодезии**

Резюме

Используя третий закон Кеплера можно определить полуось орбиты спутника на основе наблюдаемого периода обращения. Если известен также эксцентриситет орбиты, то полагая, что он близок нулю, можно вычислить радиус-вектор спутника для произвольного момента, даже если остальные моменты известны только в приближении. Настоящая работа посвящена, прежде всего, исследованию вопроса с какой точностью возможно определение радиуса-вектора. Полагая, что эксцентриситет орбиты близок нулю, высота перигея равна 1000—3000 км и что соотношение массы к поверхности спутника большое, доказывается, что возможно вычисление радиуса-вектора с точностью 10^{-5} . Основным препятствием в достижении большей точности является недостаточное знание коэффициентов тессеральных гармоник земного гравитационного поля. Остальные источники возмущений как: ошибки коэффициентов зональных гармоник, сопротивление атмосферы, давление света, притяжение Солнца и Луны вызывают значительно меньшие пертурбации. Приведен также способ наблюдения и вычисления элементов орбиты, исключающий влияние ошибок координат места наблюдения. В последней части работы приведены несколько способов использования известного радиуса-вектора для определения координат точек на поверхности Земли в геоцентрической системе, ориентированной в согласии с направлением оси вращения и плоскости экватора.

JANUSZ B. ZIELIŃSKI

**Application du rayon vecteur d'un satellite artificiel comme mesure de longueur
en géodésie**

Résumé

En vertu de la troisième loi de Kepler on peut déterminer le demi-axe de l'orbite d'un satellite en tenant compte d'une période observée de son parcours. Si l'on connaît en même temps l'excentricité de l'orbite, qu'on suppose être proche de zéro, on est en état de calculer le rayon vecteur du satellite en un moment donné, même que si d'autres moments ne sont connus qu'approximativement.

Le travail de l'auteur est sacrifié spécialement à la détermination de l'exactitude en calcul du rayon vecteur. En supposant que l'excentricité de l'orbite diffère peu de zéro et la hauteur de périgée est 1000—3000 km, on pourra, pour un satellite à grand rapport de sa masse à la surface, de calculer le rayon vecteur à 10^{-5} près. L'obtention d'une plus grande précision est entravée par la connaissance assez faible des coefficients dans les séries harmoniques tesserales du champ de gravitation terrestre. Autres sources de perturbations comme: erreurs en coefficients des séries harmoniques zonales, résistance atmosphérique, pression de lumière, attraction solaire et lunaire, sont des facteurs d'influence de moindre valeur.

On présente aussi une méthode d'observations et des calculs appropriés permettant d'éliminer les effets des erreurs en définition des coordonnées des lieux d'observation. A la fin on traite quelques problèmes se rattachant à l'usage du rayon vecteur connu pour la détermination des coordonnées des points sur la surface terrestre dans un système géocentrique et orienté par rapport à l'axe de rotation de la Terre et au plan de l'équateur.